

TARTU ÜLIKOOL

Loodus- ja Tehnoloogiateaduskond  
Füüsika Instituut

Ants Remm

**LAETUD OSAKESTE KIIRENDAMISE  
VÕIMALIKKUS MITTEDIFRAGEERUVATE  
OPTILISTE IMPULSSIDEGA**

Bakalaureusetöö

Juhendajad:

TÜ FI vanemteadur Heli Lukner  
TÜ professor akadeemik Peeter Saari

Tartu 2014

# Sisukord

<b>1</b>	<b>Sissejuhatus</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Ülevaade osakeste kiirendamisest</b>	<b>5</b>
2.1	Kiirendamine vaakumis . . . . .	5
2.2	Plasmakiirendid . . . . .	7
2.3	Võrekiirendid . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Ülevaade valgusvälja kiirustest</b>	<b>9</b>
3.1	Faasikiirus . . . . .	9
3.2	Rühmakiirus . . . . .	10
3.3	Muud kiirused . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Ülevaade lokaliseeritud lainetest ja isekuvavast väljast</b>	<b>13</b>
4.1	Üldine telgsümmeetriline lokaliseeritud laine . . . . .	13
4.2	Isekuvamine . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Laetud osakese käitumine isekuvavas väljas</b>	<b>18</b>
5.1	Välja avaldise ilmutatud kuju otsimine . . . . .	18
5.2	Simulatsioonid . . . . .	20
5.2.1	Väljatugevuse arvutamine . . . . .	20
5.2.2	Osakese trajektoori arvutamine . . . . .	23
5.2.3	Parameetrite valik . . . . .	24
5.3	Tulemused . . . . .	25
5.3.1	Elastse pörke analüüs . . . . .	26
5.3.2	Kiirguse mõju . . . . .	28
5.3.3	Edasised plaanid . . . . .	29
<b>6</b>	<b>Kokkuvõte</b>	<b>30</b>
	<b>The feasibility of charged particle acceleration with optical nondiffracting pulses</b>	<b>31</b>
	<b>Viited</b>	<b>32</b>
	<b>Lisa A Simulatsioonide graafikud</b>	<b>36</b>
	<b>Lisa B Programmide kood</b>	<b>39</b>

# 1. Sissejuhatus

Tänapäevastest osakeste kiirenditest on kuulsaim ehk Higgsi bosoni avastanud CERNis asuv LHC, mis on üheks kallimaks teadusaparaadiks Maal, makstes 4,6 miljardit Šveitsi franki [1]. Lisaks fundamentaaluuringutele kasutatakse osakeste kiirendeid ka üle maailma haiglates vähi kiiritusraviks ning laborites erinevate materjalide analüüsimiseks tarviliku kiirguse saamiseks. Kuid tänapäevased osakeste kiirendid, mis on võimelised osakesi nimetatud rakenduste jaoks vajalikule energiale kiirendama, on võrdlemisi suured ning kallid masinad.

Esimesed kiirendid kasutasid osakeste kiirendamiseks alalisvälja: ühele kehale elektrilaengut kogudes tekib selle ning vastasmärgiga laenguga keha vahele elektriväli. Laengu tekitamiseks kasutatakse näiteks Van de Graaffi generaatorit, mille maksimaalset pinget piirab läbilööki laengukogujat ümbritsevas materjalis. Sellised alaliskiirendid on ka tänapäeval laialt kasutuses, kuid kuna kõrgema energia saavutamiseks on vaja ka vastavalt kõrgemat pinget, ei sobi nad osakeste väga suurtele energiatele kiirendamiseks. Selleks sobivad paremini kiirendid, mis kasutavad kiirendamiseks vahelduvat elektromagnetvälja, mis on osakese liikumisega sünkroonne nii, et osake viibib rohkem kiirendavas kui aeglustavas väljas. Vahelduvat välja kasutavate kiirendite näideteks on tsüklotron, beetatron ja sünkrotronides ning lineaarkiirendites kasutusel olev raadiosagedus-kiirendusresonaator [2].

Eelnevalt mainitud kiirendid kasutavad raadiosageduslikku välja. Üheks lahenduseks kiirendite suuruse ning seega ka hinna alandamiseks on kasutada hoopis optilist välja, mille lainepikkused on umbes kuus suurusjärku väiksemad. See on eriti aktuaalne pärast sirtsuga impulsi võimendamise (*chirped pulse amplification*) leiutamist 1985. aastal [3], mis võimaldab tekitada suure hetkvõimsusega ülilühikesi impulsse. Tänapäevaks on laserite võimsus ka osakeste kiirendamiseks piisavalt kasvanud ning erinevate optiliste kiirendusmeetodite uurimisel käib aktiivne teadustöö [4, viited selles].

Ligikaudu 27 aastat tagasi [5] hakati aktiivsemalt nii teoreetiliselt kui eksperimentaalselt uurima lokaliseeritud ehk mittedifrageeruvaid lainevälju – elektromagnetlaineid, mis levivad justkui difraktsioonivabalt pikki vahemaid. Tänapäevaks on neid nii teoreetiliselt kui ka eksperimentaalselt põhjalikult uuritud [6, 7]. Osakeste kiirendamiseks on seni uuritud vaid monokromaatseid lokaliseeritud laineid [8]. Lokaliseeritud ehk mittedifrageeruvate impulsside abil autorile teadaolevalt veel osakeste kiirendamist uuritud ei ole. Kuna eksisteerib kõikvõimalike rühmakiirustega lokaliseeritud impulsse, võiks valida väljamaksimumi levimiskiiruse vastavalt laetud osakese algkiirusele ning seeläbi osakeste vahelist interaktsiooni tavalise Gaussi kimbu impulsiga võrreldes parandada.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärgiks on uurida ülilühikeste lokaliseeritud impulsside abil laetud osakeste kiirendamise võimalikkust. Töö esimeses osas antakse ülevaade olemasolevatest optilise välja abil osakeste kiirendamise meetoditest, valgusvälja erinevatest kiirustest ning lokaliseeritud lainetest. Teises osas otsitakse kiirendamiseks sobiva välja avaldist ning koostatakse simulatsioon relativistliku laetud osakese ühemõõtmelise käitumise uurimiseks. Esitatakse ja analüüsitakse välja parameetrite mõju osakese kiirendumisele.

## 2. Ülevaade osakeste kiirendamisest

Selles peatükis antakse ülevaade erinevatest meetoditest laetud osakeste kiirendamiseks optilise välja abil.

### 2.1. Kiirendamine vaakumis

Üheks võimaluseks laetud osakeste kiirendamiseks on teha seda vaid sobivalt valitud elektromagnetvälja abil vaakumis, kasutamata erilist keskkonda või spetsiaalsete struktuuride tekitatud lähivälja. Vaakumis kiirendamise üheks suureks eeliseks muude meetodite ees on võimalus kasutada kuitahes tugevaid elektrivälju, kuna ei pea arvestama materjali lagunemisega tugeva elektrivälja tõttu.

Eksisteerib teoreem, mida on erialases kirjanduses hakatud kutsuma Lawsoni-Woodwardi teoreemiks [9–11], kuigi originaalartiklites, millele tavaliselt viidatakse [12, 13], seda tavapärasel kujul esitatud ei ole. See teoreem väidab, et relativistlike laetud osakeste kiirendamine alaliskomponendita elektromagnetvälja abil ei ole võimalik. Teoreem kehtib eeldustel, et osake liigub vaakumis, interakteerudes vaid elektromagnetilise kaugväljaga; osakese trajektoor on sirgjoon; osakese kiirus on hüperrelativistlik ehk ligikaudu võrdne absoluutkiirusega  $v \approx c$  ning et osakese ja välja vastastikmõju ruumiline ulatus on lõpmatu [10]. Järgnevalt esitatakse Palmeri [14] eeskujul Lawsoni-Woodwardi teoreemi tõestus.

Liikugu osake laenguga  $q$  piki  $z$ -telge. Suvalise elektromagnetilise kaugvälja saab lahti kirjutada tasalainete superpositsioonina

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \iiint \vec{E}_k(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3 \vec{k} \right\}, \quad (1)$$

kus  $\omega = ck$  on lainekomponendi ringsagedus ning Maxwelli seadustest tulenevalt on iga lainekomponendi elektriväli tema lainevektoriga risti  $\vec{k} \cdot \vec{E}_k(\vec{k}) = 0$ . Teoreemi eeldustel avaldub osakese trajektoor kujul  $\vec{r} = \vec{e}_z ct$  ning ei sõltu rakendatud väljast. Sellisel juhul on summaarne osakese liikumise sihilise impulsi komponendi muut

$$\begin{aligned} \Delta p_z &= \int_{-\infty}^{\infty} q \vec{E} \cdot \vec{e}_z dt = q \Re \left\{ \iiint \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}_k(\vec{k}) \cdot \vec{e}_z e^{ic(\vec{k} \cdot \vec{e}_z - k)t} dt d^3 \vec{k} \right\} = \\ &= \frac{2\pi q}{c} \Re \left\{ \iiint \vec{E}_k(\vec{k}) \delta(\vec{k} \cdot \vec{e}_z - k) d^3 \vec{k} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Deltafunktsiooni tõttu on integraalialune avaldis nullist erinev vaid seal, kus  $\vec{k} \cdot \vec{e}_z = k$  ehk  $\vec{k} \parallel \vec{e}_z$  või  $\vec{k} = 0$ . Juhul kui lainvektor on null, on tegemist välja alaliskomponendiga ning väljatugevus on teoreemi eelduste tõttu null. Osakese liikumissihiga paralleelsete lainvektorite puhul  $\vec{k} = k\vec{e}_z$  on elektrivälja projektsioon osakese liikumissihile null  $\vec{E}_k(\vec{k}) \cdot \vec{e}_z = \frac{\vec{E}_k(\vec{k}) \cdot \vec{k}}{k} = \frac{0}{k}$ . Teoreemi sisu seisneb selles, et kuna valguse faasikiirus on sirgjooneliselt konstantse kiirusega liikuva osakese kiirusest suurem, jääb osake pidevalt valguse kiirendavast faasist maha ning kokkuvõttes mõjub osakesele sama palju kiirendavat ning aeglustavat välja.

Äsjatõestatud arvestades oleks justkui osakeste kiirendamine elektromagnetväljaga välistatud, kuid tegelikult on teoreemi eelduste rikkumiseks ning kiirenduse saavutamiseks võimalusi palju. Järgnevalt vaadeldakse erinevaid meetodeid, mille abil on siiski võimalik laetud osakeste energiat suurendada.

Teoreemi kõige tugevam eeldus on see, et osake liigub mööda ühtlast trajektoori hüperrelativistlikul kiirusel. Seega kiirendusefekti saamiseks piisab vaid sellest, kui osakese kiirus on liikumise mingil etapil mitterelativistlik. Piisavalt intensiivse valgusimpulsi korral võib selline etapp tekkida isegi osakese jaoks, mille kiirus enne ning pärast impulsiga interakteerumist on valguse kiiruse lähedane. Radiaalselt polariseeritud Gaussi impulsi välja sümmeetriateljesihilise komponendiga kiirendamist on uurinud näiteks Wong ja Kärtner [15], kuid käesoleva töö autori teadmiste kohaselt sellist kiirendamismeetodit eksperimentaalselt veel teostatud ei ole. Samuti on uurinud kiirendamist Gaussi kimbu fookuse lähedal asuva subluminaalse faasikiirusega piirkonna abil Pang *et al.* [10], kes toovad oma artiklis välja, et osakese trajektoor on välja poolt tugevalt mõjutatud ning seega pole Lawsoni-Woodwardi teoreemi eeldused täidetud.

Teiseks võimaluseks osakest kiirendada on piirata ala, kus osakesed valguslainega interakteeruvad. Näiteks võib välja piiramiseks osakese teele paigutada juhtiva plaadi, mille keskpunktis on auk, kust osakesed läbi pääsevad. Plaat tuleks paigutada sellisesse kohta, millest eespool on toimunud osakese summaarne kiirendamine ning tagapool toimuks aeglustamine, kui väli saaks plaadist edasi levida. Teoreetiliselt on sellist lähenemist uurinud näiteks Esarey, Sprangle ja Krall [9] ning eksperimentaalselt teostasid sellise osakeste kiirendamise Plettner ja Byer [11]. Üheks selle meetodi puuduseks on see, et maksimaalse kiirenduse saavutamiseks tuleks paigutada juhtiv plaat välja fookuse lähedale, kus see ei ole kaitstud suurest valguse intensiivsusest tulenevate kahjustuste eest [9].

Summaarse kiirendamise saavutamiseks piisab ka osakese liikumissuunaga ristises suunas mõjuvate jõudude ning nendest tuleneva trajektoori muutusega arvestamisest. Elektromagnetlaine on elektri- ning magnetvälja ristvõnkumiste laine, seega on paraksiaalsetes laineväljades elektrivälja tugevus levimise ristsuunas oluliselt tugevam kui pikisuunas. See levimissuunaga ristine elektriväli paneb ka osakese vastavas suunas võbisema. Magnetvälja abil kandub osa ristsuunalise võnkumise energiast ka pikisuunalisele impulsile. Seda ajas keskmistatud jõudu nimetatakse ponderomotiivseks jõuks. Tasalaine korral, mis levib  $z$ -telje sihis, avaldub

ponderomotiivne jõud kujul [9]

$$F_z = -\frac{q^2}{2\gamma mc^2} \frac{\partial}{\partial z} (\vec{A} \cdot \vec{A}), \quad (3)$$

kus  $q$  on osakese laeng,  $m$  tema mass ning  $\gamma$  tema relativistlik tegur ning  $\vec{A}$  on välja vektorpotentsiaal. Valemist (3) on näha, et jõu suund ei sõltu osakese laengu märgist. Üldisemal juhul on võimalik võnketsentri liikumist kirjeldada ponderomotiivse jõu abil alati, kui osakese liikumist saab kirjeldada kiire võnkumisega mingi punkti ümber (sealhulgas ka pikivõnkumiste puhul) ja selle võnketsentri liikumisega [16]. Intuiitvseks arusaamiseks võib osakese kiire võnkumise kineetilist energiat vaadelda kui võnketsentri potentsiaalset energiat, mille gradiendina ponderomotiivne jõud avaldub. Kahe laine tuiklemisest tekkiva ponderomotiivse jõuga kiirendamist on teoreetiliselt uurinud Esarey, Sprangle ja Krall [9].

Valguskimbu fookuse lähedal valguse intensiivsus tõuseb ning kimbu ristlõike mõõtmed kahanevad. Seega võib laineväljas võbisev laetud osake laine fookuse juures külgsuunas lainest välja paiskuda. Sellist kiirendamist nimetatakse ponderomotiivseks hajumiseks ning seda on uurinud Hartemann *et al.* [17] ning eksperimentaalselt teostanud Malka, Lefebvre ja Miquel [18].

## 2.2. Plasmakiirendid

Viimasel ajal palju uuritud ning lootustandvaid tulemusi andnud meetodite klass on elektronide niinimetatud plasmakiirendamine. Kui Lawsoni-Woodwardi teoreemi üks kiirendamist piiravatest eeldustest oli, et väli levib vaakumis, siis keskkonnas, mille murdumisnäitaja  $n > 1$ , on võimalik valgusvälja ning osakeste sünkroonne levimine ning sellest tulenevalt ka kiirendamine. Samuti mõjutab plasmas elektrone laengutiheduse fluktuatsioonidest tulenev lähiväli.

Plasmakiirendite idee väljatöötajaks võib pidada Dawsonit [19], kes uuris teoreetiliselt kahte põhilist plasmakiirendite meetodit: laseri järelvälja kiirendit (*laser wakefield accelerator*) ja plasma tuiklaine kiirendit (*plasma beat wave accelerator*). Laseri järelvälja kiirendis paneb ülilühike ja -intensiivne laserimpulss ponderomotiivse jõuga hõreda plasma elektronid liikuma ning tekitab enda järel elektronide tiheduse võnkumised, millega mõned elektronid kaasa haaratakse. Kui järelvälja kiirendis kasutatud laserimpulss pole piisavalt intensiivne ja lühike koheselt plasmavõnkumiste ergastamiseks, hakkab väli end ise moduleerima ning esialgne impulss jaguneb lühemate impulsside jadaks, mis sünkroonselt võivad siiski plasmavõnkumised ergastada. Plasma tuiklaine kiirendis kasutatakse ülilühikese laserimpulsi asemel kahe lähedase sagedusega laserkiire tuiklemist. Mõlemal meetodil on ka reaalselt saavutatud osakeste kiirendamine [20, 21].

Elektronide plasmas kiirendamise üheks puuduseks see, et kuna valgusimpulss levib seal absoluutkiirusest aeglasemalt, hakkavad kiiremad elektronid seal kiirendavast väljast ette jõudma. Kuna valgusimpulsi levimisel plasmas toimub pidev energia ülekandumine plasmavõnkumistele, on probleemiks ka laseri energia ammendumine [22–24].

## 2.3. Võrekiirendid

Märkimist väärib ka tavapärase raadiosagedus-kiirendusresonaatori optilistel skaaladel töötav analoog – võrekiirendi [25]. Selles liigub elektron paralleelselt dielektrikust difraktsioonvõrega. Laseri valgus langeb risti difraktsioonvõrele, mis tekitab laseri lähiväljas ruumilise modulatsiooni: kõrvuti asetsevate võre elementide vahele tekib elektriväljas faasinihe. Sobiva võreparameetrite valikuga saab võre läbinud elektrivälja teha selliseks, et iga võresammu tagant vaheldub elektroni kiirendav ning aeglustav väli. Seega saab, valides sobiva sammuga difraktsioonvõre, tekitada olukorra, kus elektronid liiguvad väljaga sünkroonselt ning mõned elektronid satuvad vaid kiirendavasse välja. Selle kiirendusmeetodi teostasid eksperimentaalselt Perelta *et al.* [4].



### 3. Ülevaade valgusvälja kiirustest

Erinevate kiirendusmeetodite jaoks on tähtsaimad välja erinevad karakteristikud. Näiteks otsese kiirendamise suund sõltub välja faasist, kuid ponderomotiivsel kiirendamisel on olulisim välja moodul. Osakeste efektiivseks kiirendamiseks oleks hea omada kontrolli välja vastava omaduse ajalise ja ruumilise käitumise üle. Välja erinevate karakteristikute liikumist kirjeldavad valgusvälja erinevad kiirused, millest antaksegi selles peatükis ülevaade.

#### 3.1. Faasikiirus

Monokromaatne skalaarväli  $\Psi$  avaldub kujul

$$\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos(g(\vec{r}) - \omega t), \quad (4)$$

kus  $A(\vec{r})$  on välja amplituud,  $\omega$  ringsagedus ning  $g(\vec{r})$  faasi ruumikoordinaadist sõltuv osa. Faasikiirus on pindade, mille puhul koosinuse argument – välja faas – on konstantne, liikumise kiirus ning see on antud avaldisega [26]

$$v_f(\vec{r}) = \frac{\omega}{|\vec{\nabla} g(\vec{r})|}. \quad (5)$$

Faasikiiruse suuna võib võtta samaks  $\vec{\nabla} g(\vec{r})$  suunaga. Tasalaine puhul  $g(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r}$  ja faasikiirus avaldub kujul [26]

$$v_f = \frac{\omega}{|\vec{k}|}. \quad (6)$$

Faasikiirus on oluline osakeste otsesel kiirendamisel, sest just välja faasikiirusel liikuvale osakesele mõjub pidevalt samasuunaline väli ning kiirendamine on kõige efektiivsem. Kuna osakesed saavad liikuda vaid subluminaalsetel kiirustel, on osakeste efektiivseks otseseks kiirendamiseks tarvis ka subluminaalset faasikiirust. Selle saavutamiseks võib kasutada näiteks gaasilist keskkonda, kus on ühest suurem murdumisnäitaja ning seega ka subluminaalne faasikiirus. Sellise kiirgusega osakeste kiirendamist nimetatakse pööratud Cherenkovi efektiks [27]. Subluminaalset faasikiirust on võimalik saavutada ka vaakumis, näiteks Gaussi kimbu fookuse läheduses [10], kuid enamike valgusväljade faasikiirus on superluminaalne või luminaalne.

Spetsiaalsetes metamaterjalides on võimalik saavutada ka negatiivset faasikiirust. Ülal valemiga (5) toodud faasikiiruse definitsioon määrab vaid faasikiiruse absoluutväärtuse.

Faasikiiruse märk määratakse vastavalt Veselago tingimusele: materjalides, kus tasalaine Poyntingi vektor ja lainevektor on vastassuunalised, loetakse murdumisnäitaja ja ka faasikiirus negatiivseks, muudes materjalides positiivseks [28]. Kuna esimestes moodustavad elektrivälja-, magnetvälja- ja lainevektor vasaku käe kolmiku, kutsutakse neid ka vasakukäelisteks materjalideks.

Kuna laia spektriga valgusvälja puhul ei ole välja faas üheselt määratud, saab rääkida valguse faasikiirusest vaid monokromaatse valguse puhul [26].

## 3.2. Rühmakiirus

Kui faasikiirus vastab monokromaatse välja samafaasipindade liikumise kiirusele, siis valgusvälja rühmakiirus on matemaatiline konstruktsioon, mis mõningatel erijuhtudel vastab valgusvälja sama amplituudiga pindade liikumise kiirusele. Tarvilikeks tingimusteks on, *a*) et välja eri sagedustega  $\omega$  komponentide faaside ruumist sõltuva osa  $g(\vec{r}, \omega)$  lineaarsest lähendamisest  $g(\vec{r}, \omega) = g(\vec{r}, \omega_0) + \left. \frac{\partial g}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)$  tulenev viga on selles sageduste piirkonnas, kus välja amplituud erineb nullist, tühine ja *b*) et välja sagedusspektri laius on sageduse kesksest väärtusest oluliselt väiksem  $\Delta\omega \ll \omega_0$ . Välja keske sageduse  $\omega_0$  valik rühmakiiruse arvutamisel on  $\Delta\omega$  raames vaba, kuid eeldusel, et nimetatud lähenduse tegemisel tulenev viga on väike, sõltub ka rühmakiirus sellest valikust vähe [29].

Rühmakiiruse avaldise leidmiseks võib välja üle selle monokromaatsete komponentide integraalina lahti kirjutada ning arvutuste lihtsuse huvides võib kasutada kompleksvälja, millest reaalsele väljale vastab vaid reaalosa.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int a(\vec{r}, \omega) e^{ig(\vec{r}, \omega) - i\omega t} d\omega \quad (7)$$

Arendades faasi  $g(\vec{r}, \omega_0)$  sageduse järgi Tayloriga ning eraldades kiiresti ostsilleeriva osa, saab välja avaldis kuju

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{ig(\vec{r}, \omega_0) - i\omega_0 t} \int a(\vec{r}, \omega) e^{i\Delta g(\vec{r}, \omega) - i\Delta\omega t} d\omega = e^{ig(\vec{r}, \omega_0) - i\omega_0 t} \int a(\vec{r}, \omega) e^{i\Delta\omega \left( \left. \frac{\partial g}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} - t \right)} d\omega, \quad (8)$$

kus  $\Delta g(\vec{r}, \omega) = g(\vec{r}, \omega) - g(\vec{r}, \omega_0)$  ja  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ . Saadud avaldis vastab sagedusega  $\omega_0$  ning ajas muutuva amplituudiga lainele

$$\Psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) e^{ig(\vec{r}, \omega_0) - i\omega_0 t}, \quad (9)$$

kus välja amplituud on

$$A(\vec{r}, t) = \int a(\vec{r}, \omega) e^{i\Delta\omega \left( \left. \frac{\partial g}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} - t \right)} d\omega. \quad (10)$$

Siit on näha, et juhul kui monokromaatsete komponentide amplituudid muutuvad aeglaselt  $\vec{\nabla} a(\vec{r}, \omega) \approx 0$ , sõltub amplituudi avaldis vaid muutujast  $\left. \frac{\partial g}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0} - t$ , mille konstandiga võrduma

seades saadakse sama amplituudiga pindade avaldis. Need pinnad liiguvad rühmakiirusega

$$v_r = \left| \vec{\nabla} \frac{\partial g}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_0}^{-1}. \quad (11)$$

Tasalaine puhul, kus  $g(\vec{r}, \omega) = k(\omega)\vec{e}_z \cdot \vec{r}$  ja  $\vec{e}_z$  on tasalaine levimise sihiline ühikvektor, võtab rühmakiiruse avaldis oma tavapärase kuju [29]

$$v_r = \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad (12)$$

On levinud arvamus, et rühmakiirus on ühtlasi ka signaali või energia levimise kiirus, kuid see väide kehtib vaid mõningatel erijuhtudel. Üldjuhul mingit füüsikalist vaadeldavat rühmakiirusele omistada ei saa. Materjalide anomaalse dispersiooni piirkonnas, kus murdumisnäitaja kasvab lainepikkuse kasvades ning toimub tugev neeldumine, võib rühmakiirus võtta kõikvõimalikke väärtusi, kaasa arvatud negatiivseid, nulli ja lõpmatust [26].

Kiirendusmeetoditest on rühmakiirus oluline just ponderomotiivsel kiirendamisel, kuna ponderomotiivne jõud sõltub välja amplituudist.

### 3.3. Muud kiirused

Lisaks faasikiirusele ning rühmakiirusele on veel mitmeid suurusi, mis iseloomustavad valguse levimise kiirust. Ülevaade seitsmest erinevast valguse kiiruse definitsioonist on Smithi artiklis [26] ning Bloch on defineerinud veel ühe kiiruse [30]. Selles alapeatükis antakse lühike ülevaade neist tähtsamatest.

Energia transpordi kiirus on antud välja energiavoo ehk Poyntingi vektori ning ja energiatiheduse jagatisena

$$\vec{v}_e = \vec{S}/W = 2 \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}}, \quad (13)$$

kus  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  ja  $\vec{B}$  on elektrivälja, elektrinihke, magnetvälja ning magnetinduktsiooni vektorid. Sellise definitsiooni probleem on, et välja energiatihedus ei ole otseselt mõõdetav. Samuti ei saa energia transpordi kiirust mõõta ühegi lennuaja katsega, kuna selline määratlus ei täpsusta, millal energia saabub [26].

Signaali kiirus on defineeritud kui kiirus, millega levib informatsioon. Informatsiooni all mõeldakse vastuvõtja poolt ennustamatut välja muutust. Näiteks kui signaaliks on Heaviside astmefunktsiooniga läbi korrutatud siinus, siis informatsioon jõuab vastuvõtjani sel hetkel, kui see detekteerib mittenullise signaali. Signaali kiirus on sellisel juhul allika ja detektori vahelise kauguse ning signaali väljumise ning vastuvõtmise vahelise aja suhe. Sellise mudeli probleemiks on see, et reaalses olukorras signaal transformeerub ning algselt vastuvõtjani jõudnud signaal võib olla väga nõrk. Seega oleks vaja signaali frondi detekteerimiseks ka lõpmata tundlikku detektorit, mis töötaks lõpmata laias sagedusvahemikus, sest astmefunktsiooni spekter

on lõpmata lai. Võib järeldada, et reaalsuses ei ole lõpmata järsu servaga valgusimpulsse. Praktilisem võimalus signaali leviku kiiruse defineerimiseks on eeldada, et signaal algab siis, kui välja intensiivsus ületab mingi läviväärtuse, mis sõltub kasutatavast detektorist, kuid sellise definitsiooni puuduseks võib lugeda, et see kirjeldab lisaks valguse kiirusele veel ka detektori omadusi. Tasub veel märkida, et kui iga välja komponent  $\Psi_\omega$  sagedusega  $\omega$  allub seosele

$$\vec{\nabla}^2 \Psi_\omega + \frac{n^2(\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi_\omega}{\partial t^2} = 0, \quad (14)$$

siis on signaali kiirus väiksem või võrdne maksimumiga faasikiirusest  $c/n(\omega)$ . Seega ei saa olla signaali levimise kiirus vaakumis, kus  $n(\omega) = 1$ , suurem valguse kiirusest [26].

## 4. Ülevaade lokaliseeritud lainetest ja isekuvavast väljast

Lokaliseeritud laineteks kutsutakse laineid, mille intensiivsusmaksimum on piiratud ruumiliselt kitsasse alasse ning mille intensiivsusjaotus levides ei muutu. Osakeste kiirendamise puhul on see kasulik, kuna pikendab ala, kus intensiivne valguse fookustäpp ning osake saavad interakteeruda. Selles peatükis antakse ülevaade erinevatest lokaliseeritud lainete klassidest. Selle peatüki kirjutamisel on peamiselt infot ammutatud Lukneri doktoritööst [31] ja monograafiast „Localized Waves“ [6].

### 4.1. Üldine telgsümmeetriline lokaliseeritud laine

Suvalist lahendit skalaarsele lainevõrrandile

$$\vec{\nabla}^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

võib avaldada tasalainete summana

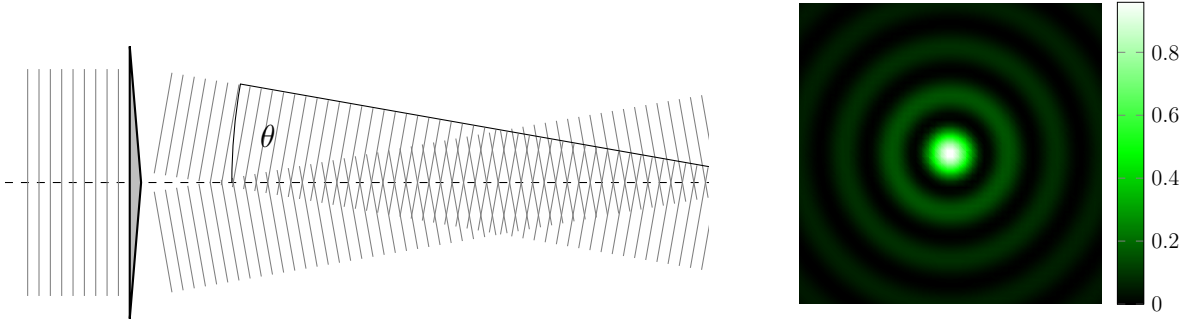
$$\Psi(\vec{r}, t) = \iiint A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} d^3 \vec{k} = 0, \quad (16)$$

kus  $A(\vec{k}) d^3 \vec{k}$  on lainevektoriga  $\vec{k}$  tasalainekomponendi amplituud ning  $\omega = c|\vec{k}|$  on laine ringsagedus. Avaldades kohavektori  $\vec{r}$  ning lainevektori  $\vec{k}$  silindrilistes koordinaatides  $\vec{r} = (\rho, \varphi, z)$ ,  $\vec{k} = (k_\rho, \phi, k_z)$ , kus  $\rho$  ja  $k_\rho$  on vastavate vektorite mingi fikseeritud teljega risti olev komponent,  $\varphi$  ja  $\phi$  on polaarnurgad ning  $z$  ja  $k_z$  on teljesihilised komponendid, võtab üldine lainevõrrandi lahendi avaldis kuju

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} A(\vec{k}) e^{i(k_z z + k_\rho \rho \cos(\varphi - \phi) - \omega t)} k_\rho d\phi dk_\rho dk_z. \quad (17)$$

Integreerimise lihtsustamiseks üle nurgamuutuja saab kasutada Jacobi-Angeri rittaarendust

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} i^n A(\vec{k}) J_n(k_\rho \rho) e^{in(\varphi - \phi)} e^{i(k_z z - \omega t)} k_\rho d\phi dk_\rho dk_z = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} A_n(k_\rho, k_z) J_n(k_\rho \rho) e^{i(k_z z - \omega t)} dk_\rho dk_z, \end{aligned} \quad (18)$$



Joonis 1: Besseli kimbu tekkimine aksikoni abil vasakul ja Besseli kimbu läbilõike intensiivsusaotus  $I \propto J_0^2(k_\rho \rho)$  paremal.

kus spektri amplituudid  $A_n$  avalduvad kujul  $A_n(k_\rho, k_z) = i^n k_\rho \int_0^{2\pi} A(\vec{k}) e^{-in\phi} d\phi$ . Saadud avaldisega (18) on võimalik kirjeldada suvalist skalaarvälja.

Nüüdsest vaadeldakse vaid silindersümmeetrilisi väljasid. See tähendab, et avaldises (18) jääb alles vaid liige  $n = 0$ . Võttes väljale singulaarse spektri

$$A(k_\rho, k_z) = \delta(k_\rho - k \sin \theta) \delta(k_z - k \cos \theta), \quad (19)$$

saadakse 0-järku Besseli kimbu avaldis

$$\Psi_{BB}(\vec{r}, t) = J_0(k_\rho \sin \theta) e^{ik(z \cos \theta - ct)}. \quad (20)$$

Besseli kimp on ehituskiviks kõikidele silindersümmeetrilistele väljadele. See on monokromaatne laine, millel on superluminaalne faasikiirus  $v^p = c / \cos \theta$  ning mis koosneb telgsümmeetriliselt kokku liidetud sama langemisnurgaga  $\theta$  tasalainetest. Tema levimisteljega ristises läbilõikes tekib rida järjest tuhmimaid rõngaid, nagu näidatud joonisel 1. Kuna igas Besseli kimbu rõngas on sama palju energiat, siis on ideaalse Besseli kimbu energia lõpmatu. Eksperimentaalselt on võimalik tekitada lõpliku energiaga valgusvälja, mis on telje lähedal väga sarnane Besseli kimbuga, kuid millel on lõplik arv rõngaid, koonusekujulise läätse ehk aksikoni abil. Matemaatiliselt on see samaväärne ideaalse Besseli kimbu leviku piiramisega apertuuri abil.

Selles paragrahvis vaadatakse, mis tingimusi peab spekter  $A(k_\rho, k_z)$  täitma, et tegu oleks nii piki- kui ka ristisuunaliselt lokaliseeritud ning kuju muutmata leviva lainega. Ruumiline lokaliseeritus sõltub välja spektri laiusest: mida kitsam on spekter, seda pikem on impulss. Deformatsioonivaba leviku jaoks eeldatakse, et väljal on konstantne rühmakiirus  $v_r = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \text{const.}$ , ning saadakse lisatingimus mida välja spekter peab täitma

$$k = \beta k_z + b, \quad (21)$$

kus  $k = \omega/c$ ,  $\beta = v_r/c$  ja  $b$  on suvaline konstant. Sellist tingimust täitva lainevälja puhul saab näidata, et välja amplituud  $|\Psi|$  sõltub vaid muutujast  $z - v_r t$  (tõestus veidi üldisemal kujul on

toodud näiteks artiklis [32]). Spektri amplituudfunktsioon võtab seega kuju

$$A(k_\rho, k_z) = A(k) \delta(k_z - (k - b)/\beta) \quad (22)$$

ning välja avaldisse jääb integreerimine vaid üle ühe muutuja (integreerimismuutujate vahetusest tulenevad konstandid on arvatud spektrifunktsiooni sisse)

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, t) &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty A(k) \delta(k_z - (k - b)/\beta) J_0(\rho \sqrt{k^2 - k_z^2}) e^{i(k_z z - \omega t)} dk_z dk = \\ &= \int_0^\infty A(k) J_0(\rho \sqrt{k^2 - (k - b)^2/\beta^2}) e^{i((k-b)z/\beta - \omega t)} dk = \\ &= \int_0^\infty A(k) J_0(\rho k \sin \theta(k)) e^{i(kz \cos \theta(k) - \omega t)} dk. \end{aligned} \quad (23)$$

Nurk  $\theta(k)$  on sagedusega  $ck$  välja komponendiks oleva Besseli kimbu langemisnurk ning on antud avaldisega  $\theta(k) = \arccos\left(\frac{k-b}{k\beta}\right)$ . Kuna Besseli kimbu langemisnurk  $\theta$  peab olema reaalne suurus, saab spektrifunktsioon  $A(k)$  erineda nullist vaid juhul kui

$$|k - b| \leq k\beta \quad (24)$$

ning kui tahta, et väli koosneks vaid  $z$ -telje positiivses suunas levivatest tasalainetest  $k_z \geq 0$ , siis peab kehtima veel täiendav tingimus, et

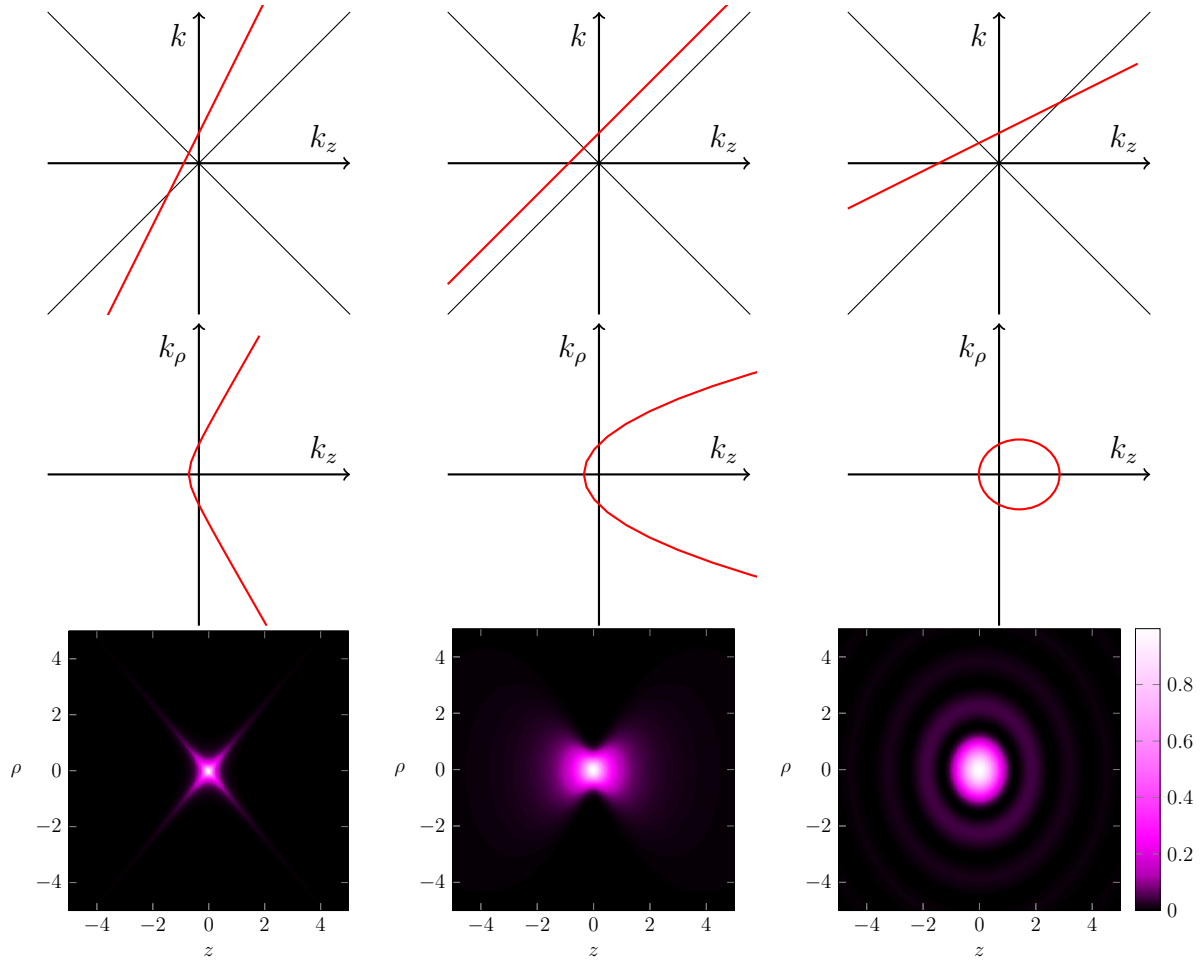
$$k \geq b. \quad (25)$$

Samamoodi nagu Besseli kimbul, on ka avaldisega (23) antud üldise lokaliseeritud lainemoodil lõpmatu energia. Üheks võimaluseks selles veenduda on vaadata välja spektri avaldist. Teadupärast on välja energia võrdeline integraaliga tema mooduli ruudust üle kogu ruumi, mis Parsevali teoreemi kohaselt on võrdne integraaliga tema spektri mooduli ruudust  $A(\vec{k})^2$  üle lainearvude. Kuna lokaliseeritud laine spekter sisaldab aga Diraci deltafunktsiooni, mille ruudu integraal on lõpmatu, on ka laine energia lõpmatu.

Sõltuvalt parameetritest  $\beta$  ja  $b$  jaotuvad erinevad väljad erinevate omadustega klassidesse [33, 34]. Graafiline ülevaade erinevatest klassidest on toodud joonisel 2.

Superluminaalsesse klassi kuuluvad kõik väljad, mille puhul  $\beta > 1$ . Parameetri  $b$  jaoks superluminaalses klassis piiranguid ei ole, kuid tingimusest (24) järeldub, et  $k \geq \frac{b\beta - |b|}{\beta^2 - 1}$ . Arvestades veel ka tingimusega (25), saame, et  $k \geq \max\left(\frac{-b}{\beta - 1}, b\right)$ . Kui üldjuhul sõltub vaid vaadeldavate väljade amplituud  $|\Psi|$  ainult muutujatest  $z - v_r t$  ja  $\rho$ , siis superluminaalse välja puhul, millel  $b = 0$  sõltub ka faas ning seega kogu lainefunktsioon  $\Psi$  ainult muutujatest  $z - v_r t$  ja  $\rho$ . Superluminaalsesse klassi kuuluvad näiteks fookuseeritud X-lained (*focused X wave*), X-lained (*X wave*) ja Bessel-X lained (*Bessel X wave*), mida kõiki iseloomustab lainevälja topeltkoonuseline kuju, mille läbilõige  $z$ - $\rho$  teljestikus meenutab tähte X.

Luminaalsesse klassi kuuluvad väljad, mille mähispind levib valguse kiirusel  $\beta = 1$ . Arvestades vaid tingimusega (24), saadakse luminaalse laine jaoks tingimused  $b \geq 0$  ja  $k \geq b/2$ ,



Joonis 2: Esimene, teine ja kolmas tulp vastavad vastavalt superluminaalsele, luminaalsele ning subluminaalsele lokaliseeritud lainete klassile. Esimesel real on toodud dispersiooniseose  $k^2 = k_z^2 + k_\rho^2$  ning konstantse rühma kiiruse tingimuse  $k = \beta k_z + b$  läbilõiked tasandis  $k_\rho = 0$ , teisel real on esitatud sõltuvus, mida täidavad lubatud  $k_\rho$  ja  $k_z$  väärtused: superluminaalse välja puhul on sõltuvuseks hüperbool, luminaalse välja puhul parabool ning subluminaalse välja puhul ellips. Kolmandal real on kujutatud erinevate klasside tüüpiliste esindajate amplituudide ruudud  $|\Psi|^2$ : superluminaalse välja jaoks fookseeritud X laine, luminaalse välja jaoks fookseeritud lainemood ning subluminaalse välja jaoks Mackinnoni impulss.

kuid lisades veel tingimus (25), järeldub, et  $k \geq b$ . Piirjuhul  $b = 0$  saadakse tasalaine. Luminaalsesse klassi kuuluvad näiteks fookseeritud lainemoodi (*focused wave mode*) tüüpi lained.

Subluminaalsesse klassi kuuluvad väljad, mis levivad valguse kiirusest aeglasemalt  $\beta < 1$ . Tingimusest (24) järeldub, et subluminaalse laine spektri muutumiskiirkond on kahelt poolt piiratud vahemik  $b/(1 + \beta) \leq k \leq b/(1 - \beta)$ . Seega peab ka subluminaalse välja puhul olema  $b > 0$ . Lisatingimus (25) tõstab lainearvude alumist piiri  $b \leq k \leq b/(1 - \beta)$ . Subluminaalsesse klassi kuulub näiteks Mackinnoni impulss.

Lainearvudele kehtivad piirangud erinevate väljatüüpide puhul võib kokku võtta järgnevate



seostega.

$$\begin{aligned} k_{min} &= \begin{cases} \frac{|b|\beta-b}{\beta^2-1}, & \text{kui } \beta > 1 \\ \frac{b}{1+\beta}, & \text{kui } \beta \leq 1 \end{cases} \\ k_{max} &= \begin{cases} \infty, & \text{kui } \beta > 1 \\ \frac{b}{1-\beta}, & \text{kui } \beta \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (26)$$

## 4.2. Isekuvamine

Isekuvavaks (*self-imaging*) kutsutakse välja, mis teatud ajalise perioodi  $\tau$  järel taastab oma esialgse kuju, olles levinud  $v_r\tau$  võrra edasi  $|\Psi(r, \varphi, z + v_r\tau, t + \tau)| = |\Psi(r, \varphi, z, t)|$ . Saab näidata, et sellise välja saamiseks piisab erinevate parameetritega  $b$  lokaliseeritud laineimpulsside kokku liitmisest. Järgnevalt on tuletatud sellise välja lainefunktsioon sõltuvus ajast ja pikikoordinaadist. Summeerides valemit (23) üle erinevate parameetrite  $b_q$ , saadakse välja avaldiseks

$$\begin{aligned} \Psi &= \sum_q \int_0^\infty A_q(k) J_0(\rho k \sin \theta_q(k)) e^{i((k-b_q)z/\beta - kct)} dk = \\ &= \sum_q e^{-ib_q ct} \int_0^\infty A_q(k) J_0(\rho k \sin \theta_q(k)) e^{i(k-b_q)(z-v_r t)/\beta} dk = \sum_q e^{-ib_q ct} F_q(\rho, \zeta), \end{aligned} \quad (27)$$

kus  $\zeta = z - v_r t$  on laine levikuparameeter. Juhul kui parameetrid  $b_q$  avalduvad kujul

$$b_q = \frac{2\pi q}{c\tau} + b_0, \quad (28)$$

kus  $q$  on täisarv, on avaldis (27) perioodilise funktsiooni Fourier' rittaarendus aja järgi, kusjuures periood on  $\tau$ . Seega ongi tingimus (28) tarvilik tingimus välja isekuvamiseks. Juhul kui  $b_0 = 0$ , on ka kompleksvälja faas perioodiline, vastasel juhul on perioodiline vaid kompleksvälja moodul [32, 35].

## 5. Laetud osakese käitumine isekuvavas väljas

Selles peatükis on toodud käesoleva bakalaureusetöö originaalosa. Esimeses alapeatükis otsitakse simuleerimiseks sobivat subluminaalset lokaliseeritud laine avaldist, teises alapeatükis on kirjeldatud tehtud simulatsioone ning kolmandas alapeatükis on esitatud tulemused.

### 5.1. Välja avaldise ilmutatud kuju otsimine

Peatükis 4 leitud üldised avaldised lokaliseeritud lainemoodide jaoks olid kõik antud integraalina spektri kuju täpsustamata. Sellise esitusviisi puudusteks on, et välja omadused ei ole selgesti valemist tuvastatavad ning et integraali väärtuse leidmine on arvutusmahukas. Nende probleemide vastu aitaks, kui mõne spektri  $A(k)$  puhul oleks integraal (23) avaldatav elementaar- ja erifunktsioonide kaudu. Selliseid ilmutatud kujul spektreid on mitmeid teada superluminaalsete ning luminaalsete väljade jaoks, kuid subluminaalse välja jaoks on autorile teada vaid Mackinnoni impulss, mille spekter, nagu paljude ilmutatud kujul avalduvate lokaliseeritud lainete spektrid, sisaldab ka  $k_z < 0$  komponente. Selles alapeatükis otsitakse Batemani integraalteisenduste kogumiku [36] abil sobivat subluminaalse välja spektrit nii, et välja avaldise saaks arvutada integreerimata.

Esmalt tuleks välja avaldis (23) teisendada lihtsamale kujule, millele võiks leida integraalteisenduste kogumikust vaste. Arvestades ka valemist (26) integreerimisrajasid saab välja avaldis kuju

$$\begin{aligned}\Psi &= \int_{\frac{b}{1+\beta}}^{\frac{b}{1-\beta}} A(k) J_0(\rho \sqrt{k^2 - (k-b)^2/\beta^2}) e^{i((k-b)z/\beta - \omega t)} dk = \\ &= \int_{\frac{b}{1+\beta}}^{\frac{b}{1-\beta}} A(k) J_0 \left( \rho \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta} \sqrt{\left( \frac{b\beta}{1-\beta^2} \right)^2 - \left( k - \frac{b}{1-\beta^2} \right)^2} \right) e^{i((k-b)z/\beta - \omega t)} dk = \quad (29) \\ &= C \int_{-B}^B A(K) J_0 \left( R \sqrt{B^2 - K^2} \right) e^{iKZ} dK,\end{aligned}$$

kus viimases võrduses tehti asendused

$$R = \rho \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\beta}, \quad B = \frac{b\beta}{1-\beta^2}, \quad K = k - \frac{b}{1-\beta^2}, \quad Z = \frac{z}{\beta} - ct, \quad C = e^{i \frac{b(z\beta - ct)}{1-\beta^2}}. \quad (30)$$

Kuna nimetatud kogumikus on siinus- ning koosinusteisenduste jaoks rohkem vaseid kui üldise kompleksse Fourier' teisenduse jaoks, võib välja avaldise kaheks osaks jagada

$$\begin{aligned}\Psi &= C \int_{-B}^B A(K) J_0 \left( R\sqrt{B^2 - K^2} \right) \cos(KZ) dK + \\ &+ iC \int_{-B}^B A(K) J_0 \left( R\sqrt{B^2 - K^2} \right) \sin(KZ) dK.\end{aligned}\quad (31)$$

Juhul kui spekter  $A(K)$  on sümmeetriline või antisümmeetriline, on üks kahest liidetavast null ning teine avaldub koosinus- või siinusteisenduse kaudu. Sümmeetrilise spektri puhul

$$\Psi = 2C \int_0^B A(K) J_0 \left( R\sqrt{B^2 - K^2} \right) \cos(KZ) dK \quad (32)$$

ning antisümmeetrilise spektri korral

$$\Psi = 2iC \int_0^B A(K) J_0 \left( R\sqrt{B^2 - K^2} \right) \sin(KZ) dK. \quad (33)$$

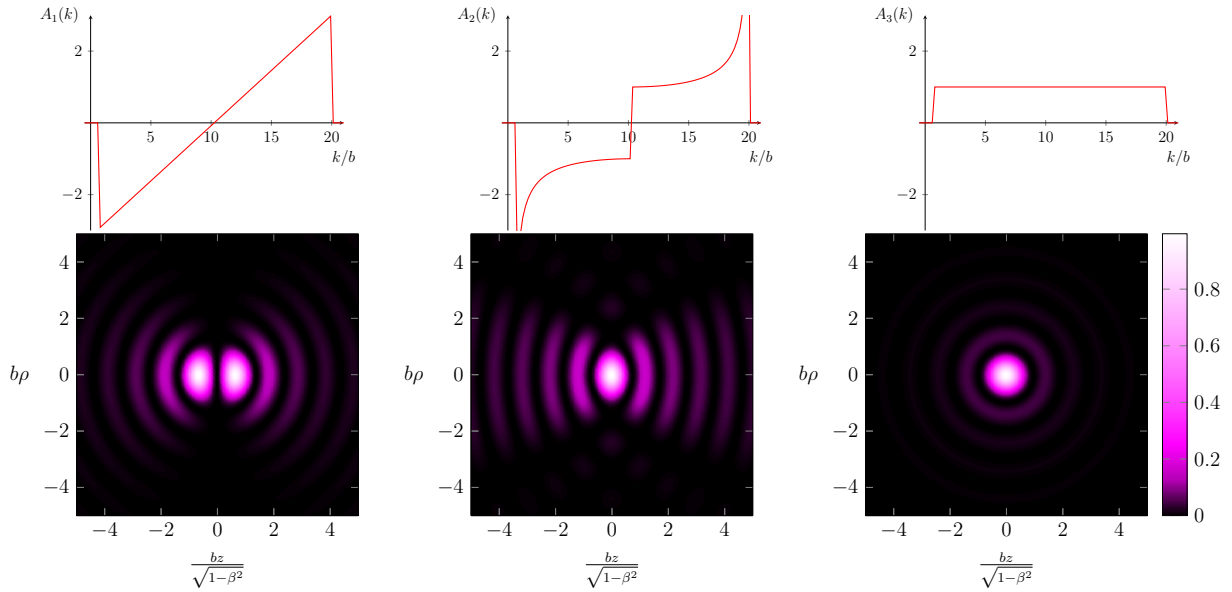
Sellisel kujul avaldiste jaoks on Batemani kogumikus vasted kahe antisümmeetrilise ning ühe sümmeetrilise spektri jaoks:

$$\begin{aligned}A_1(K) &= K, \\ A_2(K) &= \frac{\text{sign}(K)}{\sqrt{B^2 - K^2}}, \\ A_3(K) &= 1.\end{aligned}\quad (34)$$

Nendele vastavad välja avaldised on

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \frac{2iCBZ}{R^2 + Z^2} \left( \text{sinc}(B\sqrt{R^2 + Z^2}) - \cos(B\sqrt{R^2 + Z^2}) \right) = \\ &= \frac{2ib\beta^2}{1 - \beta^2} \frac{e^{i\frac{b(z\beta - ct)}{1 - \beta^2}} (z - v_r t)}{\rho^2(1 - \beta^2) + (z - v_r t)^2} \left( \text{sinc} \left( \frac{b}{1 - \beta^2} \sqrt{\rho^2(1 - \beta^2) + (z - v_r t)^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \cos \left( \frac{b}{1 - \beta^2} \sqrt{\rho^2(1 - \beta^2) + (z - v_r t)^2} \right) \right), \\ \Psi_2 &= \pi i C J_0 \left( \frac{B}{2} \left( \sqrt{R^2 + Z^2} - Z \right) \right) J_0 \left( \frac{B}{2} \left( \sqrt{R^2 + Z^2} + Z \right) \right) = \\ &= \pi i e^{i\frac{b(z\beta - ct)}{1 - \beta^2}} J_0 \left( \frac{b}{2(1 - \beta^2)} \left( \sqrt{\rho^2(1 - \beta^2) + (z - v_r t)^2} - (z - v_r t) \right) \right) \times \\ &\quad \times J_0 \left( \frac{b}{2(1 - \beta^2)} \left( \sqrt{\rho^2(1 - \beta^2) + (z - v_r t)^2} + (z - v_r t) \right) \right), \\ \Psi_3 &= 2CB \text{sinc} \left( B\sqrt{R^2 + Z^2} \right) = \\ &= \frac{2b\beta}{1 - \beta^2} e^{i\frac{b(z\beta - ct)}{1 - \beta^2}} \text{sinc} \left( \frac{b}{1 - \beta^2} \sqrt{\rho^2(1 - \beta^2) + (z - v_r t)^2} \right).\end{aligned}\quad (35)$$

Kolmas leitud väljadest on Mackinnoni impulss, kuid kahte esimest pole autori teadmiste kohaselt



Joonis 3: Esimesel real leitud subluminaalsete väljade spektrid rühmakiirusel  $v_r = 0.95c$ . Teisel real väljade moodulite ruudud.

varem mainitud. Kõiki leitud väljasid iseloomustab kiirusega  $v_p = c^2/v_r$  liikuv faasiliige ning rühmakiirusel  $v_r$  liikuv intensiivsuse amplituudi jaotus. Leitud väljade spektrid ning moodulite ruudud on toodud joonisel 3.

Nagu Mackinnoni impulss, sisaldavad ka kaks uut leitud välja rühmakiirusega vastassuunas levivaid komponente  $k_z < 0$ . Samuti on need väljad tugevalt mitteparaksiaalsed, kuna amplituud  $A(k)$  omab suuri väärtusi, juhul kui  $\theta(k)$  läheneb  $\pi/2$ -le. Kolmandaks sõltub kõikide väljade spekter parameetrist  $b$ . Nendel põhjustel ei ole ükski neist siiski sobilik simuleerimaks realistlikku lokaliseeritud lainet või isekuvavat välja.

## 5.2. Simulatsioonid

Subluminaalse isekuvava lainevälja kasulikkuse uurimiseks laetud osakeste kiirendamisel kirjutati programm, mis simuleerib laetud osakeste ühemõõtmelist liikumist piki lokaliseeritud laine optilist telge. Programmeerimiskeeles *Python* kirjutatud kood koosneb kolmest põhimoodulist: väljatugevuse arvutamise moodul, osakeste trajektooride arvutamise moodul ning tulemuste visualiseerimise moodul. Programmi lähtekood on toodud lisa B.

### 5.2.1. Väljatugevuse arvutamine

Elektromagnetvälja mõju laetud osakesele kirjeldab Lorentzi jõud, mis relativistlikul juhul on antud kujul

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right), \quad (36)$$

kus  $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$  on osakese impulss,  $m$  selle mass,  $\vec{v}$  selle kiirus,  $q$  selle laeng,  $\gamma = (1 - \vec{v}^2/c^2)^{-1/2}$  relativistlik tegur ning  $\vec{E}$  ja  $\vec{B}$  elektrivälja ja magnetinduktsiooni vektorid. Seni on käesolevas töös uuritud vaid skalaarväljasid, kuid see on vaid lähendus tõelisele vektoriaalsele elektromagnetväljale. Vektorvälja leidmiseks tuleb valemis (27), kus isekuvav valgusväli on avaldatud integraalina üle Besseli kimpude, skalaarsed Besseli kimbud vektoriaalsetega asendada. Fikseeritud langemisnurgaga  $\theta$  ning järguga  $n$  skalaarsele Besseli kimbule vastab kaks vektoriaalset lainemoodi:  $TM_n$  mood ning  $TE_n$  mood [37]. Kuna  $TE_n$  moodidel sümmeetriateljesihiline elektrivälja komponent puudub, kasutati simulatsioonides  $TM_0$  moodi, mille komponendid silindrilistes koordinaatides on

$$\begin{aligned} E_\rho &= -iE_0 \cos \theta J_1(k\rho \sin \theta) e^{ik(z \cos \theta - ct)}, \\ E_\varphi &= 0, \\ E_z &= E_0 \sin \theta J_0(k\rho \sin \theta) e^{ik(z \cos \theta - ct)}, \\ B_\rho &= 0, \\ B_\varphi &= -i \frac{E_0}{c} J_1(k\rho \sin \theta) e^{ik(z \cos \theta - ct)}, \\ B_z &= 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Selles töös piirduti vaid laetud osakese ühemõõtmelise liikumise simuleerimisega välja sümmeetriateljel, kus elektromagnetvälja ainus nullist erinev komponent on teljesihiline elektrivälja tugevus  $E_z$ . Isekuvava välja jaoks on selle väärtus, asendades valemis (27) skalaarsed Besseli kimbud vektoriaalsetega,

$$E_z(z, t) = \sum_q \int_{k_{min}}^{k_{max}} A_q(k) \sin(\theta_q(k)) e^{i(zk \cos(\theta_q(k)) - \omega(k)t)} dk. \tag{38}$$

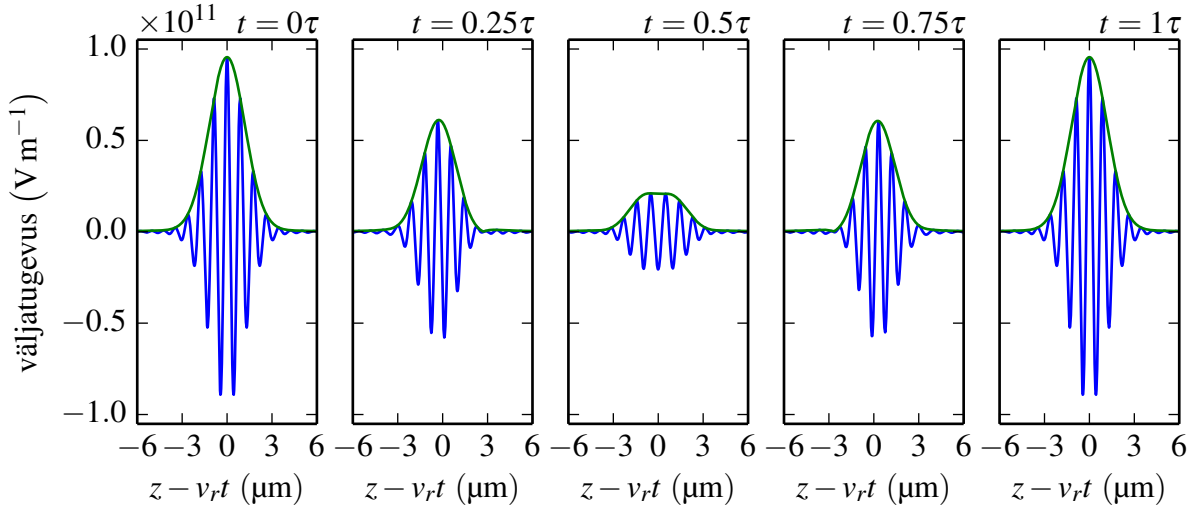
Summeerimine käib üle erinevate parameetritega  $b_q = q\Delta b$  osalainete ning  $q$  on positiivne täisarv. Simuleerimaks olukorda, kus kõik osalained on pärit samast valgusallikast, võeti ka kõikide osalainete spektrid  $A_q(k)$  võrdseks. Spektri kujuks võeti Gaussi kõver, keskvväärtusega  $k_0$  ning standardhälbega  $\sigma_k$ . Simulatsioonides kasutatud välja avaldis on seega

$$E_z(z, t) = \sum_q A_q \int_{k_{min}}^{k_{max}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}} \sqrt{1 - \frac{(k-b_q)^2}{\beta^2 k^2}} e^{i(z \frac{k-b_q}{\beta} - kct)} dk. \tag{39}$$

Kuna see väli on perioodiline, perioodiga  $\tau = \frac{2\pi}{c\Delta b}$ , piisab väljatugevuse väljaarvutamisest vaid ühe perioodi jaoks. Tüüpiline kasutatud väli on kujutatud joonisel 4.

## Impulsi energia hindamine

Selleks, et valida realistlikus suurusjärgus kordajad  $A_q$ , on vaja hinnata avaldisega (39) antud välja energiat. Nagu ka ülevaatepeatükis 4 mainitud, on Besseli kimbu ning kõigi ideaalsete lokaliseeritud lainete energia singulaarse spektri tõttu lõpmatu. Reaalse välja puhul ei ole seega



Joonis 4: Kolme eri parameetriga  $b$  lainemoodi summa käitumine optilisel teljel ühe perioodi  $\tau$  vältel. Sinise joonega on toodud reaalne väljatugevus, rohelisega kompleksvälja moodul. Kõikide lainemoodide rühmakiirused olid  $v_r = 0.95c$  ning ka spektrid olid võrdsed, keske lainearvuga  $\lambda_0 = 800 \text{ nm} = \frac{2\pi}{k_0}$  ning standardhällbega  $\sigma_\lambda = 80 \text{ nm} = \sigma_k \frac{2\pi}{k_0^2}$ . Impulsi koguenergia on 1 mJ suurusjärgus.

spektri singulaarsuse nõue (22) ilmselt täidetud täpselt, vaid deltafunktsiooni asemel on mõni lõpliku laiusega funktsioon. Teisalt saab reaalse välja energia lõplikkuse põhjuseks tuua apertuuri, mille abil väli on tekitatud, lõpliku suuruse. Tähistagu  $a$  ringikujulise apertuuri raadiust. Apertuuri lõplik suurus seab ülempiiri ka välja deformatsioonivabale levimiskaugusele  $L_{max}$ . Geomeetrilise optika kaalutlustest võib järeldada, et  $L_{max} = a / \tan \theta$ . Paraksiaalses lähenduses on näidatud [8], et lõpliku apertuuri läbinud Besseli kimbu intensiivsus sümmeetriateljel ei muutu palju kuni kauguseni  $L_{max} = a / \sin \theta \approx a / \tan \theta$  apertuurist, kust edasi kahaneb välja intensiivsus kiiresti. Simulatsioonis kasutatud impulsi energia  $W$  leidmiseks tuleb seega leida välja võimsus, mis avaldub Poyntingi vektori  $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$  integraalina üle kogu apertuuri pinna ning üle kogu aja. Impulsi energia avaldis on seega

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} P(t) dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int S_z(\rho, t) \rho d\rho dt = \frac{2\pi}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int \Re\{E_\rho\} \Re\{B_\varphi\} \rho d\rho dt, \quad (40)$$

kus elektrivälja ning magnetinduktsiooni avaldised apertuuri tasandis  $z = 0$  on

$$\begin{aligned} E_\rho(\rho, t) &= -i \sum_q A_q \int_{k_{min}}^{k_{max}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}} \frac{k - b_q}{\beta k} J_1 \left( \rho \sqrt{k^2 - \frac{(k - b_q)^2}{\beta^2}} \right) e^{-ikct} dk \\ B_\varphi(\rho, t) &= -i \sum_q \frac{A_q}{c} \int_{k_{min}}^{k_{max}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}} J_1 \left( \rho \sqrt{k^2 - \frac{(k - b_q)^2}{\beta^2}} \right) e^{-ikct} dk. \end{aligned} \quad (41)$$

Kuna oluline on vaid impulsi energia suurusjärg, on selle avaldise hindamiseks tehtud järgnevad lihtsustused. Esmalt eeldatakse, et välja energia on eri parameetritega  $b$  osaväljade energiatega

summa ning et avaldistes (41) muutuvad kordajad  $(k - b_q)/\beta k$  ja  $J_1(\rho k_\rho)$  piisavalt aeglaselt võrreldes spektri laiustega, et neid võiks integraali märgi alt välja tuua, võttes  $k = k_0$ :

$$W = \frac{2\pi}{c\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int \sum_q A_q^2 \frac{k_0 - b_q}{\beta k_0} J_1^2 \left( \rho \sqrt{k_0^2 - \frac{(k_0 - b_q)^2}{\beta^2}} \right) \left( \int_{k_{min}}^{k_{max}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma_k^2}} \sin(ckt) dk \right)^2 \rho d\rho dt. \quad (42)$$

Seejärel saab võtta sisemise integraali üle lainearvude, eeldades, et rajad on miinus lõpmatuses lõpmatuseni, ning seejärel välimise integraali üle aja

$$\begin{aligned} W &= \frac{2\pi}{c\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int \sum_q A_q^2 \frac{k_0 - b_q}{\beta k_0} J_1^2 \left( \rho \sqrt{k_0^2 - \frac{(k_0 - b_q)^2}{\beta^2}} \right) \left( \sigma_k \sqrt{2\pi} e^{-\sigma_k^2 \frac{c^2 t^2}{2}} \sin(k_0 ct) \right)^2 \rho d\rho dt = \\ &= \frac{4\pi^2 \sigma_k^2}{c\mu_0} \int \sum_q A_q^2 \frac{k_0 - b_q}{\beta k_0} J_1^2 \left( \rho \sqrt{k_0^2 - \frac{(k_0 - b_q)^2}{\beta^2}} \right) \rho d\rho \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_k^2 c^2 t^2} \sin^2(k_0 ct) dt = \\ &= \frac{2\pi^{5/2} \sigma_k}{c^2 \mu_0} \left( 1 - e^{-k_0^2/\sigma_k^2} \right) \int \sum_q A_q^2 \frac{k_0 - b_q}{\beta k_0} J_1^2 \left( \rho \sqrt{k_0^2 - \frac{(k_0 - b_q)^2}{\beta^2}} \right) \rho d\rho. \end{aligned} \quad (43)$$

Viimase integraali võtmisel on eeldatud, et iga osalaine jaoks on apertuuri laius selline, et lainete levimiskaugused tuleksid võrdsed  $a_q = L_{max} \tan \theta = L_{max} \sqrt{\frac{\beta^2 k_0^2}{(k_0 - b_q)^2} - 1}$ .

$$\begin{aligned} W &= \frac{2\pi^{5/2} \sigma_k}{c^2 \mu_0} \left( 1 - e^{-k_0^2/\sigma_k^2} \right) \sum_q A_q^2 \frac{k_0 - b_q}{\beta k_0} \int_0^{a_q} J_1^2 \left( \rho \sqrt{k_0^2 - \frac{(k_0 - b_q)^2}{\beta^2}} \right) \rho d\rho = \\ &= \frac{2\pi^{5/2} \sigma_k}{c^2 \mu_0 k_0} \left( 1 - e^{-k_0^2/\sigma_k^2} \right) \sum_q A_q^2 \frac{a_q}{\sqrt{\frac{\beta^2 k_0^2}{(k_0 - b_q)^2} - 1}} \int_0^{x_{max}} \frac{J_1^2(x) x dx}{x_{max}} = \\ &= \frac{2\pi^{5/2} \sigma_k L_{max}}{c^2 \mu_0 k_0} \left( 1 - e^{-k_0^2/\sigma_k^2} \right) \sum_q A_q^2 \int_0^{x_{max}} \frac{J_1^2(x) x dx}{x_{max}} \end{aligned} \quad (44)$$

Kui  $x_{max} = a_q \sqrt{k_0^2 - \frac{(k_0 - b_q)^2}{\beta^2}}$  on piisavalt suur, siis on viimane integraal suure täpsusega võrdne  $J_1^2(x)x$  keskvaartusega  $\frac{1}{\pi}$  ning arvestades veel, et  $\varepsilon_0 = 1/c^2 \mu_0$ , võtab impulsi energia lihtsustatud avaldis lõpliku kuju

$$W = 2\pi^{3/2} \frac{\sigma_k}{k_0} L_{max} \varepsilon_0 \left( 1 - e^{-k_0^2/\sigma_k^2} \right) \sum_q A_q^2. \quad (45)$$

### 5.2.2. Osakese trajektoori arvutamine

Osakese trajektoori arvutamiseks integreeriti numbriliselt üle aja relativistlikku ühemõõtmelist liikumisvõrrandit kujul

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{pc}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}, \\ \frac{dp}{dt} &= q \Re \{ E_z(z, t) \}, \end{aligned} \quad (46)$$

kus  $E_z$  on vastavalt valemile (39) juba varem välja arvatud. Pärast osakese algkoordinaadi  $z_0$  ning -kiiruse  $p_0$  määramist integreeriti liikumisvõrrandeid (46) 1. järku Euleri meetodil

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + \Delta t \left. \frac{dz}{dt} \right|_{p=p_n}, \\ p_{n+1} &= p_n + \Delta t \left. \frac{dp}{dt} \right|_{z=z_n, t=t_n}. \end{aligned} \quad (47)$$

### 5.2.3. Parameetrite valik

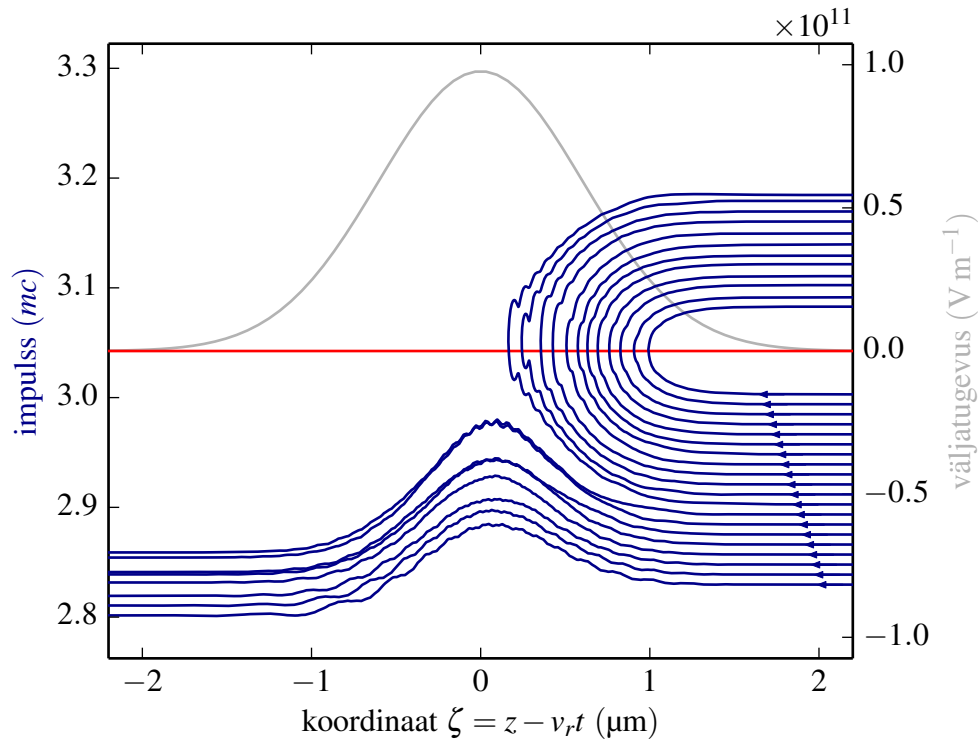
Selles alapeatükis antakse ülevaade, millised olid simulatsiooni vabad parameetrid ning mis väärtused neile valiti.

Väljatugevuse arvutamiseks tuli määrata välja kandev lainearv  $k_0$ , spektri laius  $\sigma_k$ , välja rühmakiirus  $\beta$ , isekuvava välja erinevate parameetritega  $b$  lainete arv, parameetrite väärtused  $b_q$  ning amplituudid  $A_q$ . Välja arvutamise ruumiline ulatus valiti intensiivsusmaksimumi ümbrusest  $\pm 16$  nm ning arvutusvõre aja- ning ruumisammud nõnda, et nii lainepikkuse kui ka ajalise perioodi kohta tuleks vähemalt kümme arvutuspunkti.

Kuna varieeritavate parameetrite arv on suur, fikseeriti kogu simulatsiooni jaoks spektri keskmine lainearv  $k_0 = \frac{2\pi}{800 \text{ nm}}$ . Osalainete amplituudid valiti peaaegu kõikides simulatsioonides nii, et maksimaalse deformatsioonivaba leviku ulatuse  $L_{max} = 1$  cm puhul tuleks impulsi koguennergia  $W = 1$  mJ. Välja energiat varieeriti vaid joonisel 7 toodud simulatsioonides. Et uurida spektri laiuse mõju osakese kiirenemisele, viidi kõik simulatsioonid läbi spektri suhteliste laiustega  $\frac{\sigma_k}{k_0} = 5\%$  ja  $\frac{\sigma_k}{k_0} = 20\%$ , millele vastavad impulsid välja amplituudi täislaiusega poolkõrgusel 20 fs ja 5 fs. Rühmakiiruse väärtusi varieeriti  $\beta = 0.75$ ,  $\beta = 0.95$  ja  $\beta = 0.99$  vahel. Simulatsioonid viidi läbi nii üksikute lainemoodidega kui ka kolme lainemoodi summast koosneva isekuvava väljaga. Paraksiaalses režiimis olid isekuvava välja erinevate lainemoodide kandvale lainearvule vastavad Besseli kimbu nurgad  $\theta_q(k_0) \approx (10^\circ, 20^\circ, 30^\circ)$ , üksiku lainemoodi puhul  $\theta(k_0) = 20^\circ$ ; mitteparaksiaalses režiimis isekuvava välja jaoks  $\theta_q(k_0) \approx (60^\circ, 70^\circ, 80^\circ)$ , üksiku lainemoodi jaoks  $\theta(k_0) = 70^\circ$ .

Osakeseks valiti simulatsioonides elektron massiga  $m = 0,51 \text{ MeV}/c^2$  ning laenguga  $q = 1 e$ . Trajektoori arvutamise peamised parameetrid on osakese algimpulss ning -koordinaat, lisaks veel arvutamise ajasamm ning kestus. Esialgsetest simulatsioonidest selgus, et juhul kui elektroni algkoordinaat on piisavalt kaugel välja intensiivsusmaksimumist, ei sõltu selle kiirenemine oluliselt algkoordinaadi täpsest väärtusest. Seetõttu ei tehtud simulatsioone erinevate algkoordinaatidega. Trajektoori arvutamise ajasamm valiti sama, mis välja arvutamiselgi ning kestus valiti selline, et välja puudumisel jõuaks intensiivsusmaksimum osakesest mööduda.





Joonis 5: Tumesinisega on kujutatud 20 osakese trajektooreid faasiruumis üksiku lokaliseeritud lainemoodiga interakteerumisel. Välja, mille rühmakiirus oli  $v_r = 0.95c$ , parameeter  $b \approx 0,84 \mu\text{m}^{-1}$ , keskele lainearvule vastava Besseli kimbu langemisnurk oli  $\theta(k_0) = 20^\circ$  ning spektri jaotuse standardhälve 20% keskväärtusest, moodul on kujutatud halliga parempoolsel ordinaatteljel. Osakeste trajektooreid on silutud üle kolme välja perioodi. Valgusimpulsi rühmakiirusele vastav osakese impulss on toodud punase horisontaaljoonega.

### 5.3. Tulemused

Selles peatükis kirjeldatakse, kuidas käituvad elektronid telgsümmeetrilises lokaliseeritud lainemoodis ning isekuvavas väljas, analüüsitakse kiirenduse mehhanismi ning kontrollitakse simulatsiooni korrektsust.

Simulatsioonide tulemusena selgus, et elektroni kiirendamine on võimalik ning toimub kõige efektiivsemalt paraksiaalse välja ning laia spektri puhul. Kiirendusefekti oli võimalik saavutada vaid osakeste puhul, mille esialgne kiirus ei olnud liiga palju väiksem välja rühmakiirusest, kusjuures pärast väljaga interakteerumist oli nende impulsi erinevus valguse rühmakiirusel liikuva osakese impulsi sama kui enne väljaga interakteerumist, kuid vastasmärgiline, justkui oleks toimunud elastne põrge välja ning elektroni vahel. Tüüpilise simulatsiooni, kus toimus kiirendamine, faasidiagramm on toodud joonisel 5. Elektroni impulsi muut jäi parimal juhul 0,21 MeV/c juurde, mis oli vaid 6% osakese esialgselt impulsi 3,5 MeV/c.

Lisas A on toodud kõikide simulatsioonide tulemusi kirjeldavad graafikud, millel võib täheldada järgmisi tendentse.

- Kõikides simulatsioonides, kus elektroni esialgne kiirus oli valgusimpulsi rühmakiirusest

palju väiksem, toimus osakese pidurdumine, kusjuures mida väiksem oli elektroni esialgne kiirus, seda vähem väli seda mõjutas.

- Mõningate välja parameetrite valikute juures toimus elektronide kiirendamine. Impulsi kasv oli võrdeline osakese ning valgusimpulsi kiirusele vastava impulsi vahega.
- Sellest, kas eri parameetritega  $b$  lainemoode oli väljas üks või kolm, ei sõltunud kiirenemine peaaegu üldse.
- Ülilühikese impulsiga kiirendamine oli efektiivsem pika impulsiga kiirendamisest.
- Enamikul juhtudel toimus paraksiaalse väljaga kiirendamine efektiivsemalt kui mitteparaksiaalse väljaga.

### 5.3.1. Elastse põrke analüüs

Uurimaks, kas elektroni kiirenemise juhtu saab võrrelda elastse põrkega, on tarvis tuletada relativistlik valem kiirusega  $u$  liikuvalt barjäärilt põrganud osakese kiiruse muudu jaoks. Kasutades tarkvarapaketi *Mathcad* abi sümbolarvutuseks, jõuti tulemuseni, et põrke-eelse ning -järgse kiiruse vahe on

$$\Delta v = -2(v_0 - u) \frac{c^2 - uv_0}{c^2 + u^2 - 2uv_0} \quad (48)$$

ning impulsside vahe on

$$\Delta p = -2(p_0 - p_u) \frac{p_0(m^2c^2 + p_u^2) - p_u \sqrt{(m^2c^2 + p_0^2)(m^2c^2 + p_u^2)}}{m^2c^2(p_0 - p_u)}, \quad (49)$$

kus  $v_0$  on osakese esialgne kiirus,  $m$  selle mass,  $p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$  selle esialgne impulss ning  $p_u = \frac{mu}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$  barjääri kiirusel liikuva osakese impulss. Valem (49) võtab piirjuhul, kui osake liigub enam vähem barjääri kiirusel  $p_0 - p_u \ll p_u$ , kuju

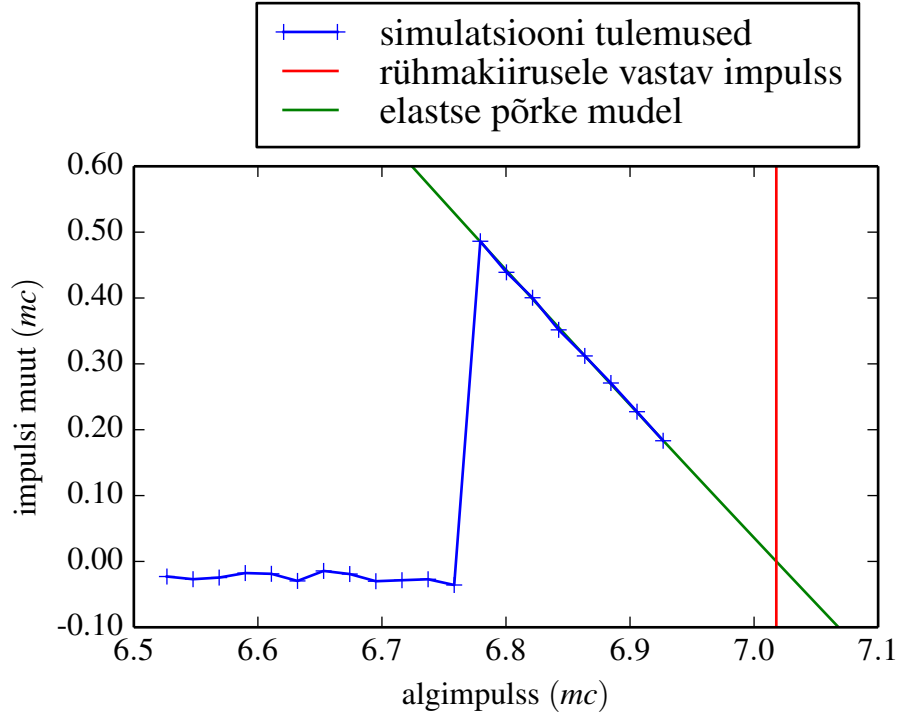
$$\Delta p = -2(p_0 - p_u), \quad (50)$$

millesarnast sõltuvust on ka joonisel 6 näha.

Elektroni elastset põrget väljalt seletaks välja intensiivsusega seotud ponderomotiivse potentsiaali olemasolu. Selle kontrollimiseks uuriti, kuidas sõltub potentsiaalibarjääri kõrgus elektrivälja maksimaalsest amplituudist. Minnes Lorentzi teisenduse abil valgusimpulsiga kaasa liikuvasse süsteemi, on osakese potentsiaalibarjäärilt põrkamise tingimus

$$\begin{aligned} E' - mc^2 &< W'_{max} \\ \gamma(\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} - \beta pc) - mc^2 &< W'_{max}, \end{aligned} \quad (51)$$

kus  $E'$  ja  $W'_{max}$  on elektroni seisuenergia ja kineetilise energia summa ning potentsiaalibarjääri kõrgus impulsiga kaasaliikuvast süsteemis,  $p$  on osakese impulss esialgses süsteemis,  $\beta$  on välja



Joonis 6: Simulatsiooni tulemuste võrdlus osakese elastse põrke mudeliga. Kasutatud valgusväli oli kolme rühmakiirusel  $v_r = 0.99\beta$  liikuva lainemoodi, langemisnurkadega  $10^\circ$ ,  $20^\circ$  ja  $30^\circ$ , summa. Välja spektri standardhälve oli 20% kesksest lainearvust.

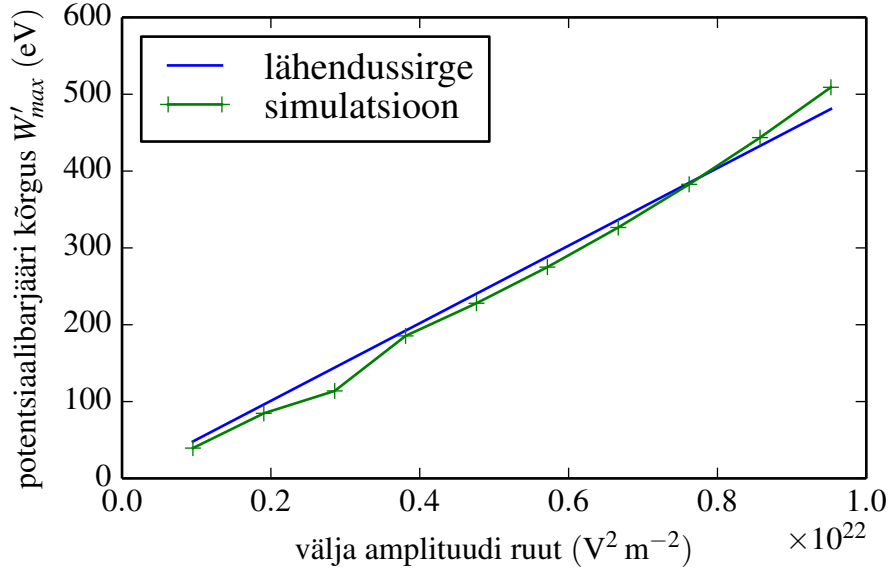
rühmakiirus ning  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Asendades võrratuse vastava võrrandiga ning avaldades impulsi, saadakse avaldis impulsi kriitilise väärtuse jaoks, mille juures toimub veel põrkamine:

$$p_{crit} = p_\beta + \beta\gamma \frac{W'_{max}}{c} \pm \frac{\gamma}{c} \sqrt{W'^2_{max} + 2W'_{max}mc^2}, \quad (52)$$

kus  $p_\beta = mc\gamma\beta$  on valgusimpulsi rühmakiirusel liikuva osakese impulss. Juhul, kui potentsiaalibarjääri kõrgus  $W'_{max}$  on palju väiksem osakese seisuenergiast  $mc^2$ , võtab see avaldis kuju

$$p_{crit} - p_\beta = \pm\gamma\sqrt{2W'_{max}m}. \quad (53)$$

Joonisel 7 on toodud potentsiaalibarjääri kõrguse  $W'_{max}$  sõltuvus maksimaalsest väljatugevuse ruudust  $E_{max}^2$ , mis on mõlemas vaadeldud taustsüsteemis sama, kuna Lorentzi teisendusel jäävad taustsüsteemide kiiruste vahe sihilised elektrivälja ning magnetinduktsiooni komponendid samaks. Potentsiaalibarjääri kõrgus on üsna heas lähenduses võrdeline väljatugevuse ruuduga, kuigi tundub, et suurematel energiatel hakkab barjääri kõrgus kiiremini tõusma. Saab näidata [16], et mitterelativistlikul juhul on seisulainest tulenev ponderomotiivne potentsiaal täpselt võrdeline elektrivälja ruuduga. Seega tundub, et ka siin on tegu ponderomotiivse efektiga, aga täpne mehhanism ei ole selge.



Joonis 7: Potentsiaalibarjääri kõrguse (arvutatud valemist (51)) sõltuvus elektrivälja mooduli ruudust. Simulatsiooni andmeid on lähendatud võrdelise seosega. Kasutatud paraksiaalse väljamoodi rühmakiirus oli  $v_r = 0.95c$  ning spektri laius oli 20% keskväärtusest.

### 5.3.2. Kiirguse mõju

Kuna elektronide trajektoorid valgusimpulsi sees on tugevalt võnkuvad, tuleb kontrollida, kas kiiratud elektromagnetkiirgusega arvestamata jätmine on õigustatud. Relativistlikul juhul annab kiiratud kiirguse võimsuse Larmori valem [38]

$$P_{rad} = \frac{q^2 \gamma^6}{6\pi \epsilon_0 c} \left( \left( \dot{\vec{\beta}} \right)^2 - \left( \vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} \right)^2 \right), \quad (54)$$

kus  $\vec{\beta}$  on osakese kiirus valguse kiiruse ühikutes ning  $\gamma$  sellele vastav relativistlik tegur. Ühemõõtmelise liikumise puhul võtab see valem kuju

$$P_{rad} = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \left( mc \gamma^3 \dot{\beta} \right)^2 = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 m^2 c^3} \left( \frac{dp}{dt} \right)^2. \quad (55)$$

Kõikide simulatsioonide vältel integreeriti numbriliselt võrrandit (55) üle aja, et saada osakese poolt kiiratud kiirguse koguenergia. Keskmiselt oli kiiratud energia ja osakese koguenergia suhe suurusjärgus  $1 \times 10^{-8}$ . Seega ei mõjuta kiirgus oluliselt osakese liikumist ning liikumisvõrrandis kiirguse reaktsiooniga arvestamata jätmine on õigustatud.

Kuigi tehtud simulatsioonides seda vaja ei läinud, uuriti ka seda, kuidas oleks võimalik arvestada kiirguse reaktsiooniga osakese liikumisvõrrandis. Klassikalise elektrodünaamika raames ei eksisteeri terviklikku teooriat, mis kirjeldaks punktlaengule mõjuvat jõudu selle enese kiiratud välja tõttu. Selline jõud peab siiski eksisteerima, kuna kiiratud energia kannab osakeselt ära nii energiat kui impulssi. Parimaks hinnanguks kiirgusjõudude leidmisel relativistlikul

kolmemõõtmelisel juhul on Lorentzi-Diraci võrrand (meetrika signatuur on  $(+, -, -, -)$ ) [39]

$$a^\mu = a_{ext}^\mu + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \left( \frac{d}{d\tau} a^\mu + \frac{1}{c^2} a_\nu a^\nu u^\mu \right), \quad (56)$$

kus  $\tau$  on punktosaakese omaaeg,  $q$  selle laeng,  $m$  selle mass,  $a^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$  on osakese 4-kiirendus,  $x^\mu = (ct, x, y, z)$  on osakese 4-koordinaat ning  $a_{ext}^\mu$  on välistest jõududest tulenev 4-kiirendus. Peamised probleemid selle võrrandiga tulenevad sellest, et see on 3. järku diferentsiaalvõrrand koordinaatide suhtes. Näiteks eksisteerivad ebafüüsikalised lahendid, kus välise välja puudumisel hakkab osake iseeneslikult eksponentsiaalselt kiirenema, ning samuti on probleemiks, et liikumisvõrrandi algingimusteks tuleb anda lisaks osakese koordinaadile ja kiirusele veel selle kiirendus. Juhul kui kiirguse reaktsioonijõu osa on oluliselt väiksem kui väliste jõudude osa, saab neid probleeme vältida, asendades osakese tegelikud kiirendused  $a^\mu$  välistest jõududest põhjustatud kiirendustega  $a_{ext}^\mu$

$$a^\mu = a_{ext}^\mu + \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \left( \frac{d}{d\tau} a_{ext}^\mu + \frac{1}{c^2} a_{ext}^\nu a_{ext}^\nu u^\mu \right). \quad (57)$$

Seda lähendust on kirjeldatud Landau ja Lifshitzi klassikalise väljateooria õpikus [39] ning seda on kasutatud ka teistes töödes [40]. Ühemõõtmelisel juhul taanduks see võrrand kujule

$$\frac{dp}{dt} = F + \frac{q^2 \gamma}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \frac{dF}{dt}, \quad (58)$$

kus  $F$  on välisest väljast tulenev jõud ning tema täistuletist aja järgi saaks arvutada kujul

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial z}, \quad (59)$$

kus  $v$  on osakese kiirus.

### 5.3.3. Edasised plaanid

Käesolevas töös uuriti osakeste liikumist vaid ühedimensionaalselt. Kiirendamise võimalikkuses veendumiseks tuleks uurida, kas osakeste trajektoorid on ka ristsuunas stabiilsed.

Kuna vaadeldud väli on suuteline endaga kaasa haarama vaid enam-vähem rühmakiirusel liikuvaid osakesi, ei olnud kiirendamine just kuigi efektiivne. Üheks võimaluseks kiirendusefekti suurendada võiks olla kiirenevate valgusimpulsside abil, mis osakese kiiruse suurenedes samuti kiirenevad. Praeguseks on kirjeldatud [41] ning mõõdetud [42] vaid superluminaalseid kiirenevaid ja aeglustuvaid lokaliseeritud impulsse.

## 6. Kokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös on uuritud lokaliseeritud ehk mittedifrageeruvate optiliste impulsside abil laetud osakeste kiirendamise võimalikkust. Töö esimeses osas on antud ülevaade laetud osakeste kiirendamisest optilise väljaga, valgusvälja erinevatest kiirustest ning lokaliseeritud lainetest. Teises osas on esitatud autori originaalne panus, milleks on

- kahe varem mainimata lokaliseeritud laine analüütiliste avaldiste tuletamine;
- programmeerimiskeeles *Python* simulatsiooniprogrammi koostamine relativistlike laetud osakeste ühemõõtmelise liikumise simuleerimiseks välise välja mõjul;
- osakeste käitumise ning kiirendusmehhanismi analüüsimine lokaliseeritud laineväljas;
- osakese kiiratud energia mõju uurimine.

Töös õnnestus näidata, et subluminaalselt leviva lokaliseeritud välja abil on võimalik relativistliku elektroni impulssi suurendada, kusjuures kiirendusefekt saavutatakse osakese elastest põrkest välja ponderomotiivse potentsiaali barjäärilt. Kiirendamine töötab kõige paremini paraksiaalse ning laia spektriga valgusvälja puhul. Sama intensiivsusega üksik lokaliseeritud lainemood ning isekuvav impulss on kiirendamise jaoks samaväärsed. Osakese kiiratud energia mõju on vaadeldud väljatugevuste juures tühine.

Käesoleva töö autor soovib tänada juhendajaid Heli Luknerit ja Peeter Saarit suurepärase eeskuju, toetava suhtumise ning jagatud õpetussõnade eest.

# The feasibility of charged particle acceleration with optical nondiffracting pulses

Ants Remm

## Summary

High energy particle accelerators are used in a variety of applications from fundamental physics to cancer treatment to medical imaging and material analysis. The technology mainly used today uses radio frequency radiation for acceleration and thus the accelerators are relatively big and expensive. With the advent of chirped pulse amplification [3], sufficient energy for particle acceleration is available at the optical spectral range, which has wavelengths of about 6 orders of magnitude smaller. Localised pulses, which have been actively studied for the last 27 years [5, 6], provide a natural candidate for a method of optical particle acceleration since their group velocity can be tuned to the electron velocity.

The purpose of this Bachelor's thesis is to study the feasibility of accelerating particles with nondiffracting optical pulses, also known as localized pulses. In the first part of the thesis reviews of the different methods of accelerating charged particles with optical fields, the different velocities of light and localised waves were given. In the second part of the thesis the original contribution of the author is presented:

- analytical expressions were derived for two new subluminal localised pulses;
- a program for simulating the one-dimensional movement of relativistic particles in an external field was written;
- the behaviour and acceleration mechanisms of an electron in an subluminal localised wave mode and self-imaging pulse were analyzed;
- it was verified that energy radiated by the particle is negligible.

It was shown that it is possible to achieve acceleration of a few percent of the initial momentum. It was suggested that the acceleration is due to a ponderomotive effect as the accelerated electron bounces elastically from the field. The acceleration is most efficient with paraxial fields and wide spectra. There was no difference in acceleration between a single wave mode and the self-imaging field if the other parameters were kept constant.

# Viited

- [1] Ask an expert – The LHC in general. URL: <http://askanexpert.web.cern.ch/AskAnExpert/en/Accelerators/LHCgeneral-en.html#3> (külastatud 25. mai 2014).
- [2] K. Wille, *The Physics of Particle Accelerators: An Introduction* (Oxford University Press, 2001).
- [3] D. Strickland and G. Mourou, “Compression of Amplified Chirped Optical Pulses,” *Optics Communications*, vol. 55, no. 6, 447–449 (1985).
- [4] E. A. Peralta, K. Soong, R. J. England, E. R. Colby, Z. Wu, B. Montazeri, C. McGuinness, J. McNeur, K. J. Leedle, D. Walz, E. B. Sozer, B. Cowan, B. Schwartz, G. Travish, and R. L. Byer, “Demonstration of electron acceleration in a laser-driven dielectric microstructure,” *Nature* (2013).
- [5] J. Durnin, “Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 4, no. 4, 651–654 (1987).
- [6] H. E. Hernandez-Figueroa, M. Zamboni-Rached, and E. Recami, eds., *Localized Waves* (John Wiley & Sons, Inc, Hoboken, New Jersey, 2008).
- [7] H. E. Hernández-Figueroa, E. Recami, and M. Zamboni-Rached, eds., *Non-diffracting Waves* (Wiley-VCH, 2013).
- [8] B. Hafizi, E. Esarey, and P. Sprangle, “Laser-driven acceleration with Bessel beams,” *Physical Review E*, vol. 55, no. 3, 3539–3545 (1997).
- [9] E. Esarey, P. Sprangle, and J. Krall, “Laser acceleration of electrons in vacuum,” *Physical Review E*, vol. 52, no. 5, 5443–5453 (1995).
- [10] J. Pang, Y. Ho, X. Yuan, N. Cao, Q. Kong, P. Wang, L. Shao, E. Esarey, and A. Sessler, “Subluminal phase velocity of a focused laser beam and vacuum laser acceleration,” *Physical Review E*, vol. 66, no. 6, 066501 (2002).
- [11] T. Plettner, R. Byer, E. Colby, B. Cowan, C. M. Sears, J. Spencer, and R. Siemann, “Proof-of-principle experiment for laser-driven acceleration of relativistic electrons in a semi-infinite vacuum,” *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams*, vol. 8, no. 12, 121301 (2005).
- [12] J. D. Lawson, “Lasers and Accelerators,” *IEEE Transactions on Nuclear Science*, vol. 26, no. 3, 4217–4219 (1979).



- [13] P. M. Woodward, “A method of calculating the field over a plane aperture required to produce a given polar diagram,” *Electrical Engineers - Part IIIA: Radiolocation, Journal of the Institution of*, vol. 93, no. 10, 1554–1558 (1946).
- [14] R. B. Palmer, “An introduction to acceleration mechanisms,” in *Frontiers of Particle Beams*, ser. Lecture Notes in Physics, M. Month and S. Turner, eds., vol. 296 (Springer Berlin Heidelberg, 1988), pp. 607–635.
- [15] L. J. Wong and F. X. Kärtner, “Direct acceleration of an electron in infinite vacuum by a pulsed radially-polarized laser beam,” *Optics express*, vol. 18, no. 24, 25035–51 (2010).
- [16] D. Bauer, P. Mulser, and W. Steeb, “Relativistic Ponderomotive Force, Uphill Acceleration, and Transition to Chaos,” *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 25, 4622–4625 (1995).
- [17] F. V. Hartemann, S. N. Fochs, G. P. Le Sage, N. C. Luhmann Jr., J. G. Woodworth, M. D. Perry, Y. J. Chen, and A. K. Kerman, “Nonlinear ponderomotive scattering of relativistic electrons by an intense laser field at focus,” *Physical Review E*, vol. 51, no. 5, 4833–4843 (1995).
- [18] G. Malka, E. Lefebvre, and J. Miquel, “Experimental Observation of Electrons Accelerated in Vacuum to Relativistic Energies by a High-Intensity Laser,” *Physical Review Letters*, vol. 78, no. 17, 3314–3317 (1997).
- [19] T. Tajima and J. Dawson, “Laser Electron Accelerator,” *Physical Review Letters*, vol. 43, no. 4, 267–270 (1979).
- [20] C. E. Clayton, K. A. Marsh, A. Dyson, M. Everett, A. Lal, W. P. Leemans, R. Williams, and C. Joshi, “Ultrahigh-gradient acceleration of injected electrons by laser-excited relativistic electron plasma waves,” *Physical Review Letters*, vol. 70, no. 1, 37–40 (1993).
- [21] D. Gordon, K. C. Tzeng, C. E. Clayton, A. E. Dangor, V. Malka, K. A. Marsh, A. Modena, W. B. Mori, P. Muggli, Z. Najmudin, D. Neely, C. Danson, and C. Joshi, “Observation of electron energies beyond the linear dephasing limit from a laser-excited relativistic plasma wave,” *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 10, 2133–2136 (1998).
- [22] S. M. Hooker, “Developments in laser-driven plasma accelerators,” *Nature Photonics*, vol. 7, no. 10, 775–782 (2013).
- [23] E. Esarey, C. B. Schroeder, and W. P. Leemans, “Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, no. 3, 1229–1285 (2009).
- [24] F. Amiranoff, S. Baton, D. Bernard, B. Cros, D. Descamps, F. Dorchies, F. Jacquet, V. Malka, J. Marquès, G. Matthieussent, P. Miné, A. Modena, P. Mora, J. Morillo, and Z. Najmudin, “Observation of Laser Wakefield Acceleration of Electrons,” *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 5, 995–998 (1998).
- [25] T. Plettner and R. L. Byer, “Microstructure-based laser-driven free-electron laser,” *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 593, no. 1-2, 63–66 (2008).

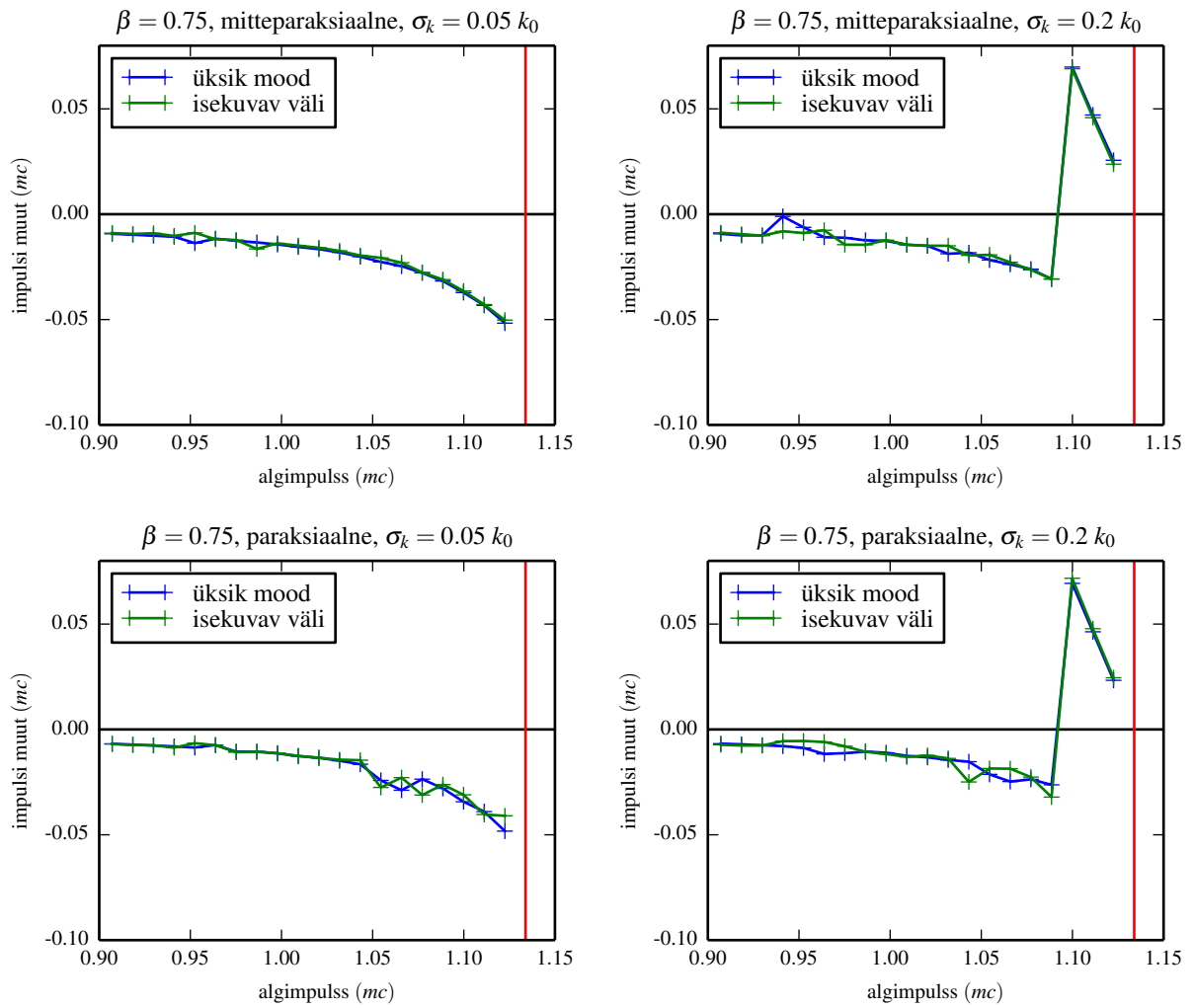
- [26] R. L. Smith, “The Velocities of Light,” *American Journal of Physics*, vol. 38, no. 8, 978 (1970).
- [27] W. Kimura, G. Kim, R. Romea, L. Steinhauer, I. Pogorelsky, K. Kusche, R. Fernow, X. Wang, and Y. Liu, “Laser Acceleration of Relativistic Electrons Using the Inverse Cherenkov Effect,” *Physical Review Letters*, vol. 74, no. 4, 546–549 (1995).
- [28] V. G. Veselago, “The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ,” *en, Soviet Physics Uspekhi*, vol. 10, no. 4, 509–514 (1968).
- [29] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, 7th ed. (Cambridge University Press, 1999).
- [30] S. C. Bloch, “Eighth velocity of light,” *American Journal of Physics*, vol. 45, no. 6, 538–549 (1977).
- [31] H. Valtna-Lukner, “Superluminally propagating localized optical pulses,” PhD thesis, University of Tartu, 2010.
- [32] J. Salo and M. M. Salomaa, “Diffraction-free pulses at arbitrary speeds,” *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, vol. 3, 366–373 (2001).
- [33] P. Saari and K. Reivelt, “Generation and classification of localized waves by Lorentz transformations in Fourier space,” *Physical Review E*, vol. 69, no. 3, 036612 (2004).
- [34] K. Reivelt, “Optical implementation of propagation-invariant pulsed free-space wave fields,” PhD thesis, University of Tartu, 2003.
- [35] K. Reivelt, “Self-imaging of three-dimensional images by pulsed wave fields,” *Optics Express*, vol. 10, no. 8, 360–9 (2002).
- [36] H. Bateman, *Tables of Integral Transforms* (McGraw-Hill Book Company, New York, 1954), vol. 1.
- [37] Y. Z. Yu and W. B. Dou, “Vector analyses of nondiffracting bessel beams,” *Progress In Electromagnetics Research Letters*, vol. 5, 57–71 (2008).
- [38] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (Wiley, 1998).
- [39] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, 4th ed. (Butterworth Heinemann, Oxford Boston, 2000).
- [40] H. Laue and K. O. Thielheim, “Acceleration of protons and electrons in the electromagnetic field of a rotating orthogonal magnetic dipole,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 61, 465 (1986).
- [41] M. Clerici, D. Faccio, A. Lotti, E. Rubino, O. Jedrkiewicz, J. Biegert, and P. Di Trapani, “Finite-energy, accelerating Bessel pulses,” *Optics express*, vol. 16, no. 24, 19807–11 (2008).

- [42] H. Valtna-Lukner, P. Bown, M. Löhmus, P. Paksarv, R. Trebino, and P. Saari, “Direct spatiotemporal measurements of accelerating ultrashort Bessel-type light bullets,” *Optics Express*, vol. 17, no. 17, 14948–55 (2009).

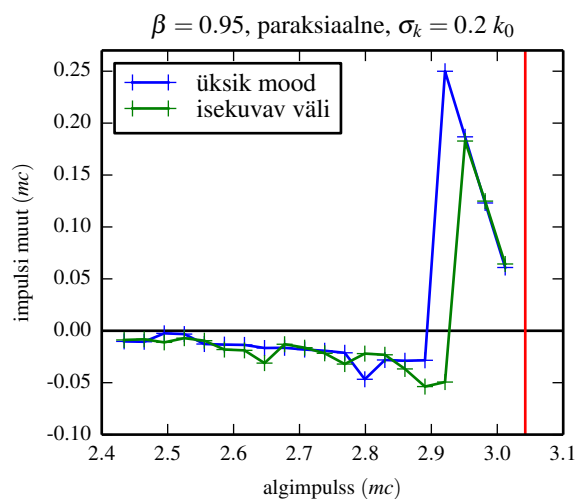
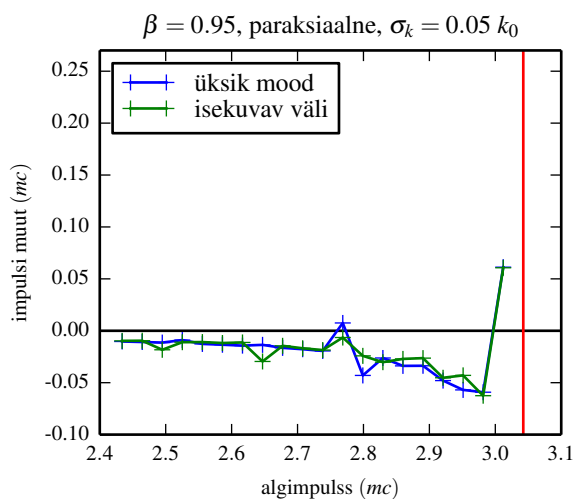
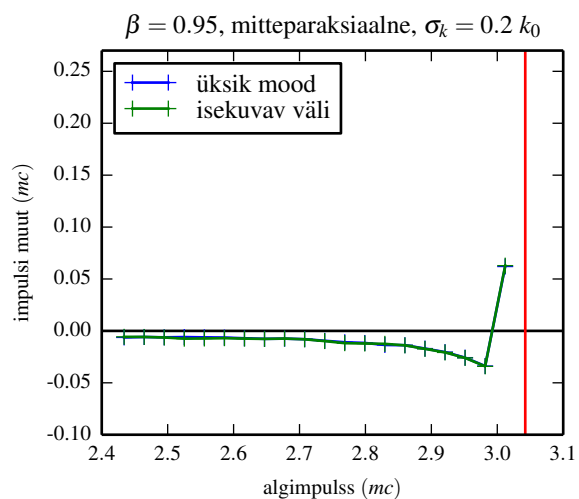
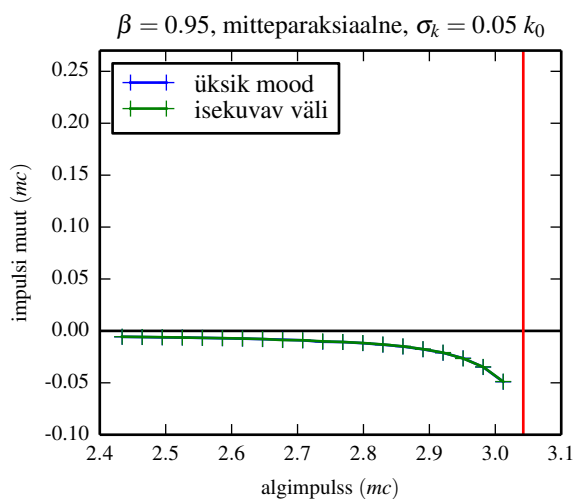
# Lisa A. Simulatsioonide graafikud

Graafikutel on kujutatud elektroni impulsi kasvu sõltuvus algsest impulsist. Punane vertikaalne joon vastab laserimpulsi rühmakiirusel liikuva elektroni impulsile.

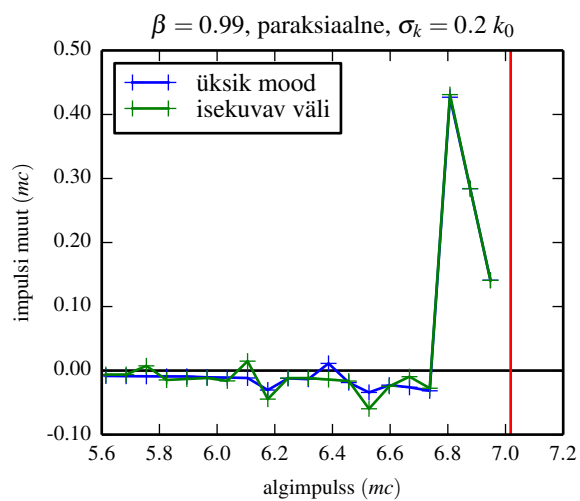
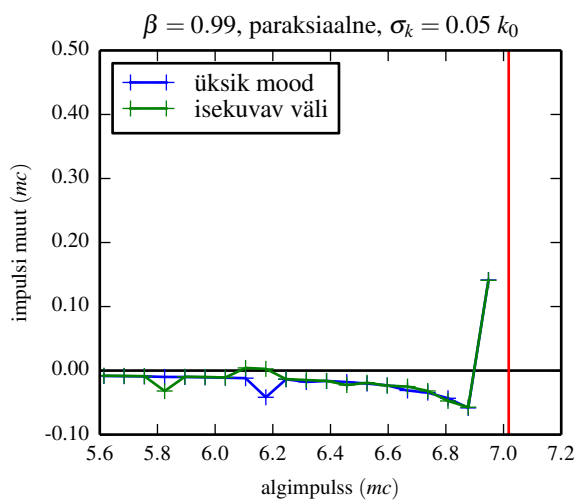
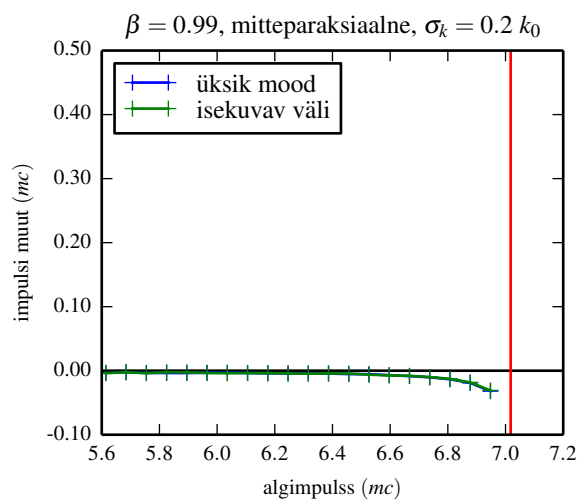
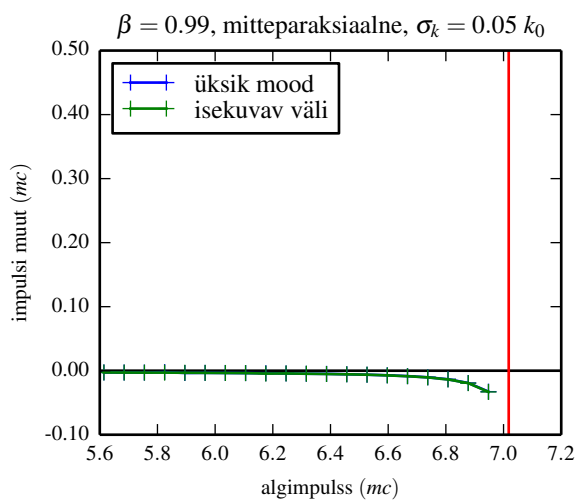
**Rühmakiirus**  $v_r = 0.75c$



**Rühmakiirus**  $v_r = 0.95c$



**Rühmakiirus**  $v_r = 0.99c$



# Lisa B. Programmide kood

## Väljatrükk B.1: field.py

```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  from __future__ import division
3  from __future__ import print_function
4  import numpy as np
5  import scipy as sp
6  import scipy.integrate
7  import scipy.special
8  import hashlib
9  import os
10
11  # ühikud: q_e = 1
12  #          c = 1
13  #          m_e = 1
14  #          um = 1
15  joule = 1/8.18710438e-14
16  MeV = 1/0.510998910
17  eV = MeV*1e-6
18  volt = eV
19  metre = 1e6
20  coulomb = 1/1.602176565e-19
21  eps0 = 8.854187817620e-12*coulomb*coulomb/(joule*metre)
22  mu0 = 1/eps0
23  second = 2.99792458e14
24  femtosecond = 0.299792458
25
26  class Field:
27      → class UnspecifiedParameterError(Exception):
28      → → pass
29
30      → def __init__(self, k_c=None, sig_k=None, xmin=None, xmax=None, beta=None, db=None, ↵
31          ↵ qs=None, As=None, xsteps=None, tsteps=None, E_pulse=None, Lmax=None):
32      → → self.k_c = k_c
33      → → self.sig_k = sig_k
34      → → self.db = db
35      → → self.qs = qs
36      → → self.beta = beta
37      → → self.xsteps = xsteps
38      → → self.xmin = xmin
39      → → self.xmax = xmax
40      → → self.As = As
41      → → self.tsteps = tsteps
42      → → self.E_pulse = E_pulse
43      → → self.Lmax = Lmax
44
45      → """Kontrollib kas kohustuslikud parameetrid on seatud, arvutab seadmata parameetritele ↵
46          ↵ vaikeväärtused"""
47      → def init_params(self):
```

```

46 → → if self.k_c is None: raise UnspecifiedParameterError("k_c")
47 → → if self.sig_k is None: raise UnspecifiedParameterError("sig_k")
48 → → if self.beta is None: raise UnspecifiedParameterError("beta")
49 → → if self.db is None: raise UnspecifiedParameterError("db")
50 → → if self.qs is None: raise UnspecifiedParameterError("qs")
51 → → if self.xsteps is None: raise UnspecifiedParameterError("xsteps")
52
53 → → if self.xmin is None: self.xmin = -2*np.pi/self.sig_k
54 → → if self.xmax is None: self.xmax = 2*np.pi/self.sig_k
55 → → if self.As is None: self.As = np.array([1/len(self.qs) for q in self.qs])
56 → → elif len(self.As) != len(self.qs): raise ValueError("len(As) != len(qs)")
57 → → if self.tsteps is None: self.tsteps = int(22*self.k_c/self.db)
58 → → if self.Lmax is None: self.Lmax = 10000 # 1 cm
59
60 → → self.tper = 2*np.pi/self.db #välja periood
61 → → self.xs = np.linspace(self.xmin, self.xmax, self.xsteps)
62 → → self.ts = np.linspace(0, self.tper, self.tsteps, endpoint=False)
63 → → self.bs = np.array([self.db*q for q in self.qs])
64
65 → def hash_md5(self, prev=hashlib.md5()):
66 → → prev.update(str(self.k_c))
67 → → prev.update(str(self.sig_k))
68 → → prev.update(str(self.beta))
69 → → prev.update(str(self.db))
70 → → prev.update(np.array(self.qs).view(np.uint8))
71 → → prev.update(self.As.view(np.uint8))
72 → → prev.update(str(self.xsteps))
73 → → prev.update(str(self.xmin))
74 → → prev.update(str(self.xmax))
75 → → prev.update(str(self.tsteps))
76 → → return prev
77
78 → def calculate(self):
79 → → self.init_params()
80 → → filename = "fields/field-" + self.hash_md5().hexdigest() + ".npy"
81 → → if os.path.isfile(filename):
82 → → → print(u"Laen väljatugevuse failist.")
83 → → → self.psi = np.load(filename)
84 → → else:
85 → → → self._calculate()
86 → → → if not os.path.exists("fields"):
87 → → → → os.makedirs("fields")
88 → → → np.save(filename, self.psi)
89 → → self.update_factor()
90
91 → def _calculate(self):
92 → → print(u"Arvutan väljatugevust: ", end='')
93 → → progressmax = len(self.bs)*self.xsteps
94 → → progress = 0
95 → → self.psi = np.zeros([self.xsteps, self.tsteps], dtype=np.complex128)
96 → → for b, A in zip(self.bs, self.As):
97 → → → if self.kmin(b) >= self.kmax(b): continue
98 → → → def int_real(k, x):
99 → → → → ret = np.exp(-(k-self.k_c)**2/(2*self.sig_k**2))
100 → → → → ret *= np.sqrt(1 - (k-b)**2/(self.beta*k)**2)
101 → → → → ret *= np.cos((k-b)*x/self.beta)
102 → → → → return ret
103 → → → def int_imag(k, x):
104 → → → → ret = np.exp(-(k-self.k_c)**2/(2*self.sig_k**2))
105 → → → → ret *= np.sqrt(1 - (k-b)**2/(self.beta*k)**2)
106 → → → → ret *= np.sin((k-b)*x/self.beta)

```



```

107 → → → → return ret
108 → → → → for ix, x in enumerate(self.xs):
109 → → → → progress += 1
110 → → → → if (10*(progress-1))//progressmax != (10*progress)//progressmax:
111 → → → → → print(int(100*progress//progressmax), end=' ')
112 → → → → re = A*sp.integrate.quad(int_real, self.kmin(b), self.kmax(b), args=(x,))[0]
113 → → → → im = A*sp.integrate.quad(int_imag, self.kmin(b), self.kmax(b), args=(x,))[0]
114 → → → → for it, t in enumerate(self.ts):
115 → → → → → self.psi[ix, it] += np.exp(-1j*b*t)*(re + 1j*im)
116 → → → print()
117
118 → def kmin(self, b):
119 → → return max(self.k_c - 4*self.sig_k, abs(b)/(self.beta + np.sign(b)), b)
120
121 → def kmax(self, b):
122 → → return min(self.k_c + 4*self.sig_k, np.inf if self.beta > 1 else b/(1 - self.beta))
123
124 → def energy(self):
125 → → ret = 0
126 → → for b, A in zip(self.bs, self.As):
127 → → → if (1 - b/self.k_c)**2 > self.beta**2: continue
128 → → → ret += A*A #/np.sqrt((self.k_c*self.beta/(self.k_c - b))**2 - 1)
129 → → → ret *= 2*np.pi*1.5*self.sig_k*self.Lmax*eps0*(1 - ←
    ↪ np.exp(-self.k_c**2/self.sig_k**2))/self.k_c
130 → → return ret
131
132 → def update_factor(self):
133 → → if self.E_pulse is None:
134 → → → self.factor = 1
135 → → else:
136 → → → ret = self.energy()
137 → → → ret = self.E_pulse*joule/ret
138 → → → self.factor = np.sqrt(ret)
139
140 → def thetarange(self):
141 → → thetamax = -np.inf
142 → → thetamin = np.inf
143 → → for b in bs:
144 → → → thetamax = max(thetamax, np.arccos((1-b/(kmin(b) if b >= 0 else kmax(b)))/beta))
145 → → → thetamin = min(thetamin, np.arccos((1-b/(kmax(b) if b >= 0 else kmin(b)))/beta))
146 → → return (thetamin, thetamax)
147
148 → def force_it(self, x, it):
149 → → ix = (self.xsteps-1)*(x - self.xmin)/(self.xmax - self.xmin)
150 → → wx, ix = np.modf(ix)
151 → → return self.factor*np.real((1-wx)*self.psi[ix, it%self.tsteps] + wx*self.psi[ix+1, ←
    ↪ it%self.tsteps])
152
153 → def force(self, x, t):
154 → → it = self.tsteps*t/self.tper
155 → → wt, it = np.modf(it)
156 → → return (1-wt)*self.force_it(x, it) + wt*self.force_it(x, it+1)
157
158 → def fwhm(self):
159 → → y = np.amax(np.abs(self.psi), 1)
160 → → half_max = y.max()/2
161 → → #find when function crosses line half_max (when sign of diff flips)
162 → → #take the 'derivative' of signum(half_max - y)
163 → → d = np.sign(half_max - y[0:-1]) - np.sign(half_max - y[1:])
164 → → return self.xs[np.where(d < 0)[-1]][0] - self.xs[np.where(d > 0)[0]][0] #return the ←
    ↪ difference (full width) of left and right most indexes

```

```

165
166 → def p_crit(self):
167 → → beta = self.beta
168 → → gamma = (1 - self.beta**2)**(-0.5)
169 → → b = np.average(self.bs)
170 → → Emax = self.factor*np.abs(self.psi).max()
171 → → potmax = Emax*Emax/(4*b**2*gamma**2)
172 → → potmax = potmax + 1
173 → → return (gamma*beta*potmax - np.sqrt(potmax**2 - 1), gamma*beta*potmax + ↵
    ↵ np.sqrt(potmax**2 - 1))
174
175 → def info(self):
176 → → print(u"kandev lainearv:          {} 1/um = 2pi/{} um".format(self.k_c, ↵
    ↵ 2*np.pi/self.k_c))
177 → → print(u"lainearvu standardhälve: {} 1/um = {} %".format(self.sig_k, ↵
    ↵ 100*self.sig_k/self.k_c))
178 → → print(u"b väärtused:          " + ", ".join("{}: {:.2f}".format(b) for b in ↵
    ↵ self.bs]) + " 1/um")
179 → → import warnings; warnings.simplefilter("ignore", RuntimeWarning)
180 → → thetas = [180*np.arccos((1-b/self.k_c)/self.beta)/np.pi for b in self.bs]
181 → → print(u"vastavad nurgad theta:  " + ", ".join("{}: {:.2f}".format(theta) for theta in ↵
    ↵ thetas]) + " kraadi")
182 → → print(u"impulsi periood:          {} um = {} fs".format(self.tper*self.beta, ↵
    ↵ self.tper/femtosecond))
183 → → width = self.fwhm()
184 → → print(u"impulsi FWHM:          {} um = {} fs".format(width, ↵
    ↵ width/femtosecond/self.beta))
185 → → pcrit = self.p_crit()
186 → → print(u"p_crit:                  {} kuni {} m c^2".format(pcrit[0], pcrit[1]))

```

---

## Väljatrükk B.2: particles.py

```

1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  from __future__ import division, print_function
3  import numpy as np
4  import hashlib
5  import os
6
7  joule = 1/8.18710438e-14
8  MeV = 1/0.510998910
9  eV = MeV*1e-6
10 volt = eV
11 metre = 1e6
12 coulomb = 1/1.602176565e-19
13 eps0 = 8.854187817620e-12*coulomb*coulomb/(joule*metre)
14 tau = 1/(6*np.pi*eps0) # radiation reaction characteristic time
15
16 class Particles:
17 → class UnspecifiedParameterError(Exception):
18 → → pass
19
20 → def __init__(self, field=None, x0s=None, p0s=None, tmin=None, tmax=None, grid=False, ↵
    ↵ saveper=1):
21 → → self.field = field
22 → → self.tmin = tmin
23 → → self.tmax = tmax
24 → → self.saveper = saveper
25 → → if not grid:
26 → → → self.x0s = np.copy(x0s)
27 → → → self.p0s = np.copy(p0s)
28 → → else:

```

```

29 → → → x0sp0s = np.meshgrid(x0s, p0s)
30 → → → self.x0s = x0sp0s[0].flatten()
31 → → → self.p0s = x0sp0s[1].flatten()
32
33
34 → """Kontrollib kas kohustuslikud parameetrid on seatud, arvutab seadmata parameetritele ↔
    ↔ vaikeväärtused"""
35 → def init_params(self):
36 → → if self.field is None: raise UnspecifiedParameterError("field")
37 → → if self.x0s is None: raise UnspecifiedParameterError("x0s")
38 → → if self.p0s is None: raise UnspecifiedParameterError("p0s")
39 → → if self.tmax is None: raise UnspecifiedParameterError("tmax")
40
41 → → if len(self.x0s) != len(self.p0s): raise ValueError("len(x0s) != len(p0s)")
42 → → else: self.numpars = len(self.x0s)
43 → → if self.tmin is None: self.tmin = 0
44
45 → → self.dt = self.field.ts[1] - self.field.ts[0]
46 → → self.it0 = self.tmin//self.dt
47 → → self.numts = int((self.tmax - self.tmin)/(self.dt*self.saveper))
48 → → self.ts = (np.arange(self.numts)*self.saveper + self.it0)*self.dt
49
50 → def hash_md5(self, prev=hashlib.md5()):
51 → → prev = self.field.hash_md5(prev)
52 → → prev.update(str(self.field.E_pulse))
53 → → prev.update(self.x0s.view(np.uint8))
54 → → prev.update(self.p0s.view(np.uint8))
55 → → prev.update(str(self.tmin))
56 → → prev.update(str(self.tmax))
57 → → prev.update(str(self.saveper))
58 → → return prev
59
60 → def calculate(self):
61 → → self.init_params()
62 → → filename = "trajectories/traject-" + self.hash_md5().hexdigest() + ".npz"
63 → → if os.path.isfile(filename):
64 → → → print(u"Laen trajektoorid failist.")
65 → → → data = np.load(filename)
66 → → → self.xs = data['xs']
67 → → → self.ps = data['ps']
68 → → → self.fs = data['fs']
69 → → else:
70 → → → self._calculate()
71 → → → if not os.path.exists("trajectories"):
72 → → → → os.makedirs("trajectories")
73 → → → np.savez(filename, xs=self.xs, ps=self.ps, fs=self.fs)
74
75 → def _calculate(self):
76 → → print(u"Arvutan trajektoore: ", end='')
77 → → progressmax = self.numts*self.saveper-1
78 → → progress = 0
79 → → self.xs = np.zeros([self.numts, self.numpars])
80 → → self.ps = np.zeros([self.numts, self.numpars])
81 → → self.fs = np.zeros([self.numts, self.numpars])
82 → → self.xs[0] = self.x0s
83 → → self.ps[0] = self.p0s
84 → → xlast = self.x0s
85 → → plast = self.p0s
86 → → flast = np.zeros([self.numpars])
87 → → for it in range(1, self.numts*self.saveper):
88 → → → progress += 1

```

```

89 → → → if (10*(progress-1)//progressmax != (10*progress)//progressmax:
90 → → → → print(int(100*progress//progressmax), end=' ')
91 → → → for ip in range(self.numpars):
92 → → → → if xlast[ip] < self.field.xmax and xlast[ip] > self.field.xmin:
93 → → → → → flast[ip] = self.field.force_it(xlast[ip], self.it0 + it - 1)
94 → → → → else:
95 → → → → → flast[ip] = 0
96 → → → → xlast += self.dt*(plast/np.sqrt(1 + plast**2) - self.field.beta)
97 → → → → plast += self.dt*flast
98 → → → → if it % self.saveper == 0:
99 → → → → → self.xs[it//self.saveper] = xlast
100 → → → → → self.ps[it//self.saveper] = plast
101 → → → → → self.fs[it//self.saveper] = flast
102 → → → print()
103
104
105 → def p0(self):
106 → → return self.field.beta/np.sqrt(1 - self.field.beta**2)
107
108 → def rad_energy(self):
109 → → # kiiratud energia  $P = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m^2 c^4} (dp/dt)^2$ 
110 → → return tau*np.sum(self.fs**2, 0)*self.dt*self.saveper
111
112 → def info(self):
113 → → print("maksimaalne kiiratud energia: {} m c^2".format(self.rad_energy().max()))
114 → → print("max jõud: {} volt/metre".format(self.fs.max()*metre/volt))
115 → → frad = np.sqrt(1 + self.ps[1:]**2)*tau*(self.fs[1:]-self.fs[:-1])/self.dt
116 → → print("max reaktsioonijõud: {} volt/metre".format(frad.max()*metre/volt))
117 → → print("nende suhe: {}".format(self.fs.max()/frad.max()))

```

---

### Väljatrükk B.3: visualisation.py

---

```

1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 from __future__ import division
3 import numpy as np
4 import matplotlib.pyplot as plt
5 import matplotlib.animation as anim
6 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
7
8 femtosecond = 0.299792458
9 MeV = 1/0.510998910
10 eV = MeV*1e-6
11 volt = eV
12 metre = 1e6
13 joule = 1/8.18710438e-14
14 coulomb = 1/1.602176565e-19
15 eps0 = 8.854187817620e-12*coulomb*coulomb/(joule*metre)
16 tau = 1/(6*np.pi*eps0) # radiation reaction characteristic time
17
18 persistants = []
19
20 def animate_field(field, perips=1, filename=None):
21 → frameskip = int(perips*field.tsteps/50)
22 → fig = plt.figure()
23 → ymax = 1.1*field.factor*np.abs(field.psi).max()*metre/volt
24 → ax = plt.axes(xlim=(field.xmin, field.xmax), ylim=(-ymax, ymax))
25 → ax.set_xlabel("koordinaat (um)")
26 → ax.set_ylabel("väljatugevus (V/m)")
27 → line1, = ax.plot([], [], lw=2)
28 → line2, = ax.plot([], [], lw=2)
29 → def init():

```

```

30 → → line1.set_data([], [])
31 → → line2.set_data([], [])
32 → → return line1, line2,
33 → def animate(it):
34 → → it *= frameskip
35 → → line1.set_data(field.xs, ←
    ↪ field.factor*np.real(field.psi[:,it%field.tsteps])*metre/volt)
36 → → line2.set_data(field.xs, field.factor*np.abs(field.psi[:,it%field.tsteps])*metre/volt)
37 → → return line1, line2,
38 → ani = anim.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init, frames=field.tsteps//frameskip, ←
    ↪ interval=20, blit=True)
39 → if not filename is None: ani.save(filename, fps=30, extra_args=['-vcodec', 'libx264'])
40 → persistants.append(ani)
41
42 def animate_phasespace(particles, perips=1, indices=None, field=True, filename=None):
43 → if indices is None:
44 → → indices = range(particles.numpars)
45 → try:
46 → → for i in indices:
47 → → → break
48 → except TypeError:
49 → → indices = [indices]
50 → subxs = particles.xs[:, indices]
51 → subps = particles.ps[:, indices]
52 → frameskip = int(perips*particles.field.tsteps/(50*particles.saveper))
53 → fig = plt.figure()
54 → ax = plt.axes(xlim=(particles.field.xmin, particles.field.xmax), ylim=(0, ←
    ↪ 2*particles.p0()))
55 → ax.set_xlabel("koordinaat")
56 → ax.set_ylabel("impulss")
57 → points, = ax.plot([], [], marker='o', color='r', ls='')
58 → if field:
59 → → ax2 = ax.twinx();
60 → → ymax = 1.1*particles.field.factor*np.abs(particles.field.psi).max()*metre/volt
61 → → ax2.set_ylim(-ymax, ymax)
62 → → ax2.set_xlim(particles.field.xmin, particles.field.xmax)
63 → → ax2.set_xlabel("koordinaat (um)")
64 → → ax2.set_ylabel(u"väljatugevus (V/m)")
65 → → line1, = ax2.plot([], [], lw=2)
66 → → line2, = ax2.plot([], [], lw=2)
67 → def init():
68 → → points.set_data([], [])
69 → → if field:
70 → → → line1.set_data([], [])
71 → → → line2.set_data([], [])
72 → → → return points, line1, line2,
73 → → return points,
74 → def animate(it):
75 → → it *= frameskip
76 → → points.set_data(subxs[it], subps[it])
77 → → if field:
78 → → → line1.set_data(particles.field.xs, ←
    ↪ particles.field.factor*np.real(particles.field.psi[:, (it*particles.saveper + ←
    ↪ particles.it0)%particles.field.tsteps])*metre/volt)
79 → → → line2.set_data(particles.field.xs, ←
    ↪ particles.field.factor*np.abs(particles.field.psi[:, (it*particles.saveper + ←
    ↪ particles.it0)%particles.field.tsteps])*metre/volt)
80 → → → return points, line1, line2,
81 → → return points,
82 → ani = anim.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init, ←
    ↪ frames=particles.numts//frameskip, interval=20, blit=True)

```

```

83 → if not filename is None: ani.save(filename, fps=30, extra_args=['-vcodec', 'libx264'])
84 → persistants.append(ani)
85
86 def animate_phasespace_transformed(particles, perips=1, indices=None, field=True, ↵
    ↵ filename=None):
87 → if indices is None:
88 → → indices = range(particles.numpars)
89 → try:
90 → → for i in indices:
91 → → → break
92 → except TypeError:
93 → → indices = [indices]
94 → subxs = particles.xs[:, indices]
95 → subps = particles.ps[:, indices]
96 → frameskip = int(perips*particles.field.tsteps/(50*particles.saveper))
97 → fig = plt.figure()
98 → ax = plt.axes(xlim=(particles.field.xmin, particles.field.xmax), ylim=(0, ↵
    ↵ 2*particles.p0()))
99 → ax.set_xlabel("koordinaat")
100 → ax.set_ylabel("impulss")
101 → points, = ax.plot([], [], marker='o', color='r', ls='')
102 → if field:
103 → → ax2 = ax.twinx();
104 → → ymax = 1.1*particles.field.factor*np.abs(particles.field.psi).max()*metre/volt
105 → → ax2.set_ylim(-ymax, ymax)
106 → → ax2.set_xlim(particles.field.xmin, particles.field.xmax)
107 → → ax2.set_xlabel("koordinaat (um)")
108 → → ax2.set_ylabel(u"väljatugevus (V/m)")
109 → → line1, = ax2.plot([], [], lw=2)
110 → → line2, = ax2.plot([], [], lw=2)
111 → def init():
112 → → points.set_data([], [])
113 → → if field:
114 → → → line1.set_data([], [])
115 → → → line2.set_data([], [])
116 → → → return points, line1, line2,
117 → → return points,
118 → def animate(it):
119 → → it += frameskip
120 → → points.set_data(subxs[it], subps[it])
121 → → if field:
122 → → → line1.set_data(particles.field.xs, ↵
    ↵ particles.field.factor*np.real(particles.field.psi[:, (it*particles.saveper + ↵
    ↵ particles.it0)%particles.field.tsteps])*metre/volt)
123 → → → line2.set_data(particles.field.xs, ↵
    ↵ particles.field.factor*np.abs(particles.field.psi[:, (it*particles.saveper + ↵
    ↵ particles.it0)%particles.field.tsteps])*metre/volt)
124 → → → return points, line1, line2,
125 → → return points,
126 → ani = anim.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init, ↵
    ↵ frames=particles.numts//frameskip, interval=20, blit=True)
127 → if not filename is None: ani.save(filename, fps=30, extra_args=['-vcodec', 'libx264'])
128 → persistants.append(ani)
129
130
131 def plot_coordinate(particles, indices=None):
132 → fig = plt.figure()
133 → ax = plt.axes(xlabel="aeg", ylabel="koordinaat (um)")
134 → ax.set_xlim(particles.ts.min(), particles.ts.max())
135 → ax.set_ylim(particles.field.xmin, particles.field.xmax)
136 → if indices is None:

```

```

137     → → indices = range(particles.numpars)
138     → try:
139     → → for i in indices:
140     → → → ax.plot(particles.ts, particles.xs[:, i], marker='+')
141     → except TypeError:
142     → → ax.plot(particles.ts, particles.xs[:, indices], marker='+')
143
144 def plot_momentum(particles, indices=None):
145     → fig = plt.figure()
146     → ax = plt.axes(xlabel="aeg", ylabel="impulss (m_e c)")
147     → ax.set_xlim(particles.ts.min(), particles.ts.max())
148     → ax.set_ylim(0, 1.1*particles.ps.max())
149     → if indices is None:
150     → → indices = range(particles.numpars)
151     → try:
152     → → for i in indices:
153     → → → ax.plot(particles.ts, particles.ps[:, i], marker='+')
154     → except TypeError:
155     → → ax.plot(particles.ts, particles.ps[:, indices], marker='+')
156
157 def plot_force(particles, indices=None, radiation=True):
158     → fig = plt.figure()
159     → ax = plt.axes(xlabel="aeg", ylabel=u"jõud (eV/m)")
160     → ax.set_xlim(particles.ts.min(), particles.ts.max())
161     → ax.set_ylim(1.1*particles.fs.min()*metre/volt, 1.1*particles.fs.max()*metre/volt)
162     → if radiation:
163     → → frad = np.zeros(particles.fs.shape)
164     → → frad[1:] = np.sqrt(1 + ↵
        ↵ particles.ps[1]**2)*tau*(particles.fs[1:]-particles.fs[:-1])/particles.dt
165     → if indices is None:
166     → → indices = range(particles.numpars)
167     → try:
168     → → for i in indices:
169     → → → ax.plot(particles.ts, particles.fs[:, i]*metre/volt, marker='+')
170     → → → if radiation:
171     → → → → ax.plot(particles.ts, frad[:, i]*metre/volt, marker='+')
172     → except TypeError:
173     → → ax.plot(particles.ts, particles.fs[:, indices]*metre/volt, marker='+')
174     → → if radiation:
175     → → → ax.plot(particles.ts, frad[:, indices]*metre/volt, marker='+')
176
177 def plot_delta_p(particles, aritime=False):
178     → fig = plt.figure()
179     → ax = fig.gca(projection='3d')
180     → ax.set_xlabel("osakese saabumisaeg (fs)") if aritime else ax.set_xlabel("algkoordinaat")
181     → ax.set_ylabel("algimpulss (m_e c)")
182     → ax.set_zlabel("impulsi muut (m_e c)")
183     → xs = particles.xs[0]
184     → ps = particles.ps[0]
185     → if aritime:
186     → → xs = xs/(particles.field.beta - ps/np.sqrt(1 + ps*ps))/femtosecond
187     → ax.plot_trisurf(xs, ps, particles.ps[-1]-particles.ps[0], cmap=plt.cm.jet)
188
189 def show():
190     → plt.show()

```

---

## **Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, Ants Remm (sünnikuupäev: 22.05.1992),

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose  
„Laetud osakeste kiirendamise võimalikkus mittedifrageeruvate optiliste impulssidega“,  
mille juhendajad on Heli Lukner ja Peeter Saari,
  - 1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil,  
sealhulgas digitaalarhiivi DSpace lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse  
tähtaja lõppemiseni;
  - 1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas  
digitaalarhiivi DSpace kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega  
isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **26.05.2014**